Corrigé

Identités remarquables et équations

Choisir la forme la plus adaptée d'une expression

Exercice 1.

1. Développer et réduire l'expression suivante :

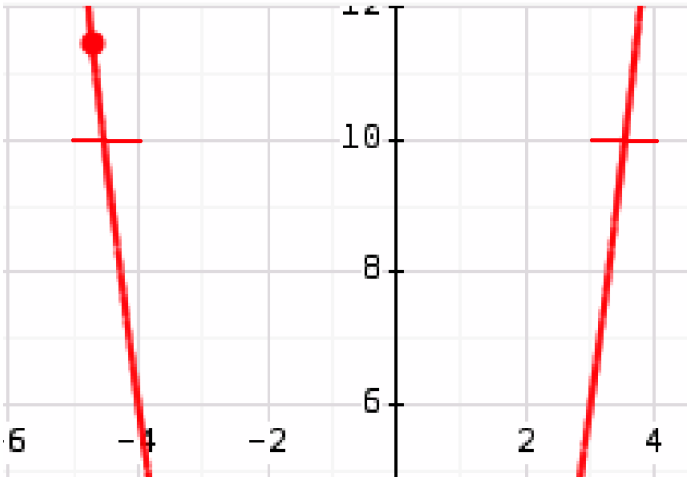
$$a(x) = (x+3)(x-2) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$$

2. Pour calculer $a(5)$ peu importe la forme. Avec celle de l'énoncé cela donne :
$a(5) = (5+3)(5-2) = 8 \times 3 = 24$

3. Pour résoudre $a(x) = 0$ il vaut mieux utiliser la forme factorisée, comme toujours quand on cherche une racine (quand l'image d'une fonction vaut 0). On obtient :
$a(x) = 0 \iff (x+3)(x-2) = 0$
$\iff x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad x-2 = 0$
$\iff x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 2$

4. Pour résoudre $a(x) = -6$ on peut commencer par remarquer la forme développée de $a(x)$ finit par -6. Voilà qui va être bien pratique. Utilisons la forme développée :
$a(x) = -6 \iff x^2 + x - 6 = -6 \iff x^2 + x = -6 + 6 = 0$
On se retrouve avec = 0... factorisons, par x, pour faire comme à la question précédente.
$x^2 + x = x(x+1)$
Ainsi, $a(x) = -6 \iff x(x+1) = 0$
$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x+1 = 0$
$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1$

5. Pour résoudre $a(x) = 10$ nous n'avons pas de méthode pratique pour le moment. Nous pouvons par contre approcher la valeur graphiquement. On voit ci-dessous que cette équation a deux solutions valant environ -4,5 ou 3,5. On pourrait être plus précis en utilisant une dichotomie.



Exercice 2.

1. $b(x) = (-x-4)(5x-5) = -5x^2 - 20x + 5x + 20 = -5x^2 - 15x + 20$
2. N'importe quelle forme. $b(10) = (-10-4)(5\times 10-5) = (-10-4)(5\times 10-5) = -14\times 45 = -630$
3. La forme factorisée. $b(x) = 0 \iff (-x-4)(5x-5) = 0$
   $\iff -x-4 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x-5 = 0$
   $\iff -x = 4 \quad \text{ou} \quad 5x = 5$
   $\iff x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 1$
4. La forme développée. $b(x) = 20 \iff -5x^2 - 15x + 20 = 20$
   $\iff -5x^2 - 15x = 0 \iff x(-5x-15) = 0$
   $\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -5x - 15 = 0$
   $\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3$
5. Comme pour l'exercice précédent aucune forme n'est appropriée mais on peut trouver une solution approchée graphiquement. Ici $b(x) = -12$ pour x environ égal à -4,5 ou 1,5.

Exercice 3.

1. $c(x) = (-5x-1)(2x+3)(3x-4)(-4x+5) = 120x^4 - 106x^3 - 291x^2 + 247x + 60$
2. $c(1) = 120\times 1^4 - 106\times 1^3 - 291\times 1^2 + 247\times 1 + 60 = 30$
3. Avec la forme factorisée on trouve $x = -0,2 \quad \text{ou} \quad -1,5 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad 1,25$
4. On peut utiliser la forme développée puisqu'elle finit par 60 mais cela donne :
   $120x^4 - 106x^3 - 291x^2 + 247x + 60 = 60$
   $\iff 120x^4 - 106x^3 - 291x^2 + 247x = 0 \iff x(120x^3 - 106x^2 - 291x + 247)$
   Or on ne sait pas résoudre la partie en degré 3... Il faudrait donc à nouveau se résigner à trouver les solutions approchées graphiquement. En l'occurrence pour x environ égal à -1,6 ; 0 ; 0,8 ou 1,6.

Exercice 4.

1. $d(x) = (9x+7)^2 = 81x^2 + 126x + 49$
2. N'importe laquelle. $d(5) = 2704$
3. La forme factorisée. $d(x) = 0 \iff (9x+7)^2 = 0 \iff 9x+7 = 0 \iff x = \dfrac{-7}{9}$
4. La forme développée. $d(x) = 49 \iff 81x^2 + 126x + 49 = 49$
   $\iff 81x^2 + 126x = 0 \iff x(81x+126) = 0$
   $\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{-126}{81} = \dfrac{-14}{9}$

Exercice 5.

1. $f(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$
2. La forme factorisée. $f(x) = 0 \iff (x-3)(x+3) = 0 \iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$?
3. La forme développée. $f(x) = -9 \iff x^2 - 9 = -9 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$

Exercice 6.

1. $g(x) = 16x^2 - 4 = (4x-2)(4x+2)$
2. La forme factorisée. $g(x) = 0 \iff (4x-2)(4x+2) = 0$
   $\iff x = 0{,}5 \quad \text{ou} \quad x = -0{,}5$?
3. La forme développée. $g(x) = -4 \iff 16x^2 - 4 = -4 \iff 16x^2 = 0 \iff x = 0$

Exercice 7.

1. $h(x) = 9x^2 - 10 = (3x - \sqrt{10})(3x + \sqrt{10})$
2. La forme factorisée. $h(x) = 0 \iff (3x - \sqrt{10})(3x + \sqrt{10}) = 0$
   $\iff 3x - \sqrt{10} = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + \sqrt{10} = 0$
   $\iff x = \dfrac{\sqrt{10}}{3} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{-\sqrt{10}}{3}$
3. La forme développée. $h(x) = -10 \iff 9x^2 - 10 = -10 \iff 9x^2 = 0 \iff x = 0$

Exercice 8.

1. $i(x) = 4x^2 + 8x = x(4x+8)$
2. La forme factorisée. $i(x) = 0 \iff x(4x+8) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$

Exercice 9.

1. $j(x) = (x+4)^2 - (x-3)(x+4) = (x+4)(x+4-x-3) = (x+4)(1) = x+4$
2. Ici la fonction se simplifie en une fonction affine, exceptionnellement la forme développée fera mieux l'affaire. $j(x) = 0 \iff x+4 = 0 \iff x = -4$

Exercice 10.

1. $k(x) = (7x-9)^2 = 49x^2 - 126x + 81$
2. N'importe laquelle. $k(5) = (7 \times 5 - 9)^2 = 676$?
3. Commençons par chercher quand $k(x) = 0$:
   $k(x) = 0 \iff (7x-9)^2 = 0 \iff 7x - 9 = 0 \iff x = \frac{9}{7}$. $k(x)$ étant au carré on sait que $k(x) >= 0$ pour toute valeur réelle de x. On a donc $k(x) > 0$ pour x différent de $\frac{9}{7}$.
4. La forme développée. $k(x) < 81 \iff 49x^2 - 126x + 81 < 81$
   $\iff 49x^2 - 126x < 0 \iff x(49x - 126) < 0$.
   Il faut alors étudier le signe de chacun des deux facteurs :
   x est négatif sur $]-\infty; 0]$ et positif sur $[0; +\infty[$.
   $49x - 126$ est négatif sur $\left]-\infty; \frac{126}{49}\right]$ et positif sur $\left[\frac{126}{49}; +\infty\right[$.
   Ainsi $k(x)$ est positif sur $]-\infty; 0]$; négatif sur $\left]0; \frac{126}{49}\right]$; et positif sur $\left[\frac{126}{49}; +\infty\right[$.