Corrigé

Vecteurs avec coordonnées
Caractériser l'alignement par la colinéarité de vecteurs.

Exercice 1.

Dire si A, B et C sont alignés dans chacun des cas suivants :

1. $A(2;3)$, $B(5;7)$ et $C(1;6)$.
   On calcule les coordonnées de deux vecteurs avec ces trois points. Par exemple
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   On calcule ensuite le déterminant de ces deux vecteurs :
   $3 \times 3 - 4 \times (-1) = 13 \neq 0$
   Ces trois points ne sont pas alignés.

2. $A(2;3)$, $B(5;7)$ et $C(8;11)$.
   On fait de même : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

   On calcule ensuite le déterminant de ces deux vecteurs :
   $3 \times 8 - 4 \times 6 = 0$
   Ces trois points sont alignés.

3. $A(2;3)$, $B(5;7)$ et $C(-8;-11)$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8-2 \\ -11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}$

   On calcule ensuite le déterminant de ces deux vecteurs :
   $3 \times (-14) - 4 \times (-10) = -2 \neq 0$
   Ces trois points ne sont pas alignés.

4. $A(-4;8)$, $B(10;15)$ et $C(277;148)$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10-(-4) \\ 15-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 277-(-4) \\ 148-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 281 \\ 140 \end{pmatrix}$

   On calcule ensuite le déterminant de ces deux vecteurs :
   $14 \times 140 - 7 \times 281 = -7 \neq 0$
   Ces trois points ne sont pas alignés.

5. $A(10;10)$, $B(-20;15)$ et $C(-200;150)$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -20-10 \\ 15-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -200-10 \\ 150-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -210 \\ 140 \end{pmatrix}$

   On calcule ensuite le déterminant de ces deux vecteurs :

$-30 \times 140 - 5 \times (-210) = -3150 \neq 0$
Ces trois points ne sont pas alignés.

6. $A(-10;10)$, $B(100;-100)$ et $C(-1000;1000)$. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 100-(-10) \\ -100-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ -110 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1000-(-10) \\ 1000-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -990 \\ 990 \end{pmatrix}$

On calcule ensuite le déterminant de ces deux vecteurs :
$110 \times -990 + 110 \times (-990) = 0$
Ces trois points sont alignés.

Exercice 2.

En reprenant les trios de points de l'exercice précédent dire pour chaque cas si les droites (AB) et (AC) sont confondues, parallèles ou sécantes.
Les droites ne peuvent pas être strictement parallèles puisqu'elles ont toujours un point commun : A. Par contre dans les cas où les points A, B et C sont alignés elles sont confondues. Sinon elles sont sécantes.

Exercice 3.

Dans chaque cas compléter les coordonnées du point C de façon à ce que les trois points A, B et C soient alignés.

1. $A(1;1)$, $B(5;5)$ et $C(10;10)$.
2. $A(2;3)$, $B(4;5)$ et $C(6;7)$.
3. $A(10;15)$, $B(15;10)$ et $C(25;0)$.
4. $A(2;3)$, $B(5;7)$ et $C(-2,5;-3)$.
5. $A(-12;30)$, $B(52;17)$ et $C(1;\frac{1751}{64})$.
6. $A(0;213)$, $B(502;328)$ et $C(\frac{2905074}{115};6000)$.