Annales baccalauréat STI2D
Complexes

Exercice 1.

On considère les nombres complexes $z_1 = 6e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Écrire z_2 sous forme exponentielle. Détailler les calculs.
$z_2 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$.
Donc $|z_2|^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3+1 = 4 = 2^2$, donc $|z_2| = 2$.
On peut en factorisant ce module 2 dans l'écriture de z_2, écrire :
$z_2 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$.
Or $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{5\pi}{6}$, donc :
$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{5\pi}{6}}$.

2. En déduire une écriture du nombre complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2^3}$ sous forme exponentielle.
En se servant du résultat précédent :
$Z = \dfrac{z_1}{z_2^3} = \dfrac{6e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\left(2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^3} = \dfrac{6}{8}\dfrac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}}}$.
Or $e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc
$Z = \dfrac{3}{4}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{3}{4}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 2.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Mettre le nombre complexe $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle en détaillant les calculs.
•Avec $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$, on a $|z|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3+1 = 4 = 2$, d'où $|z| = 2$.
•On peut alors en factorisant 2 , écrire :

$z=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$.

Or on sait que $\cos\frac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, donc :

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$, écriture exponentielle de z.

Exercice 3.

On considère les nombres complexes

$$z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Exprimer sous forme exponentielle le produit $z_1\times z_2$.
   $z_1\times z_2=\left(2\,\mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{3}}\right)\times\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{4}}\right)=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\left(\imath\frac{\pi}{3}+\imath\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\imath\frac{7\pi}{12}}$
2. En déduire une forme trigonométrique de $z_1\times z_2$.
   $z_1\times z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\imath\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 4.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

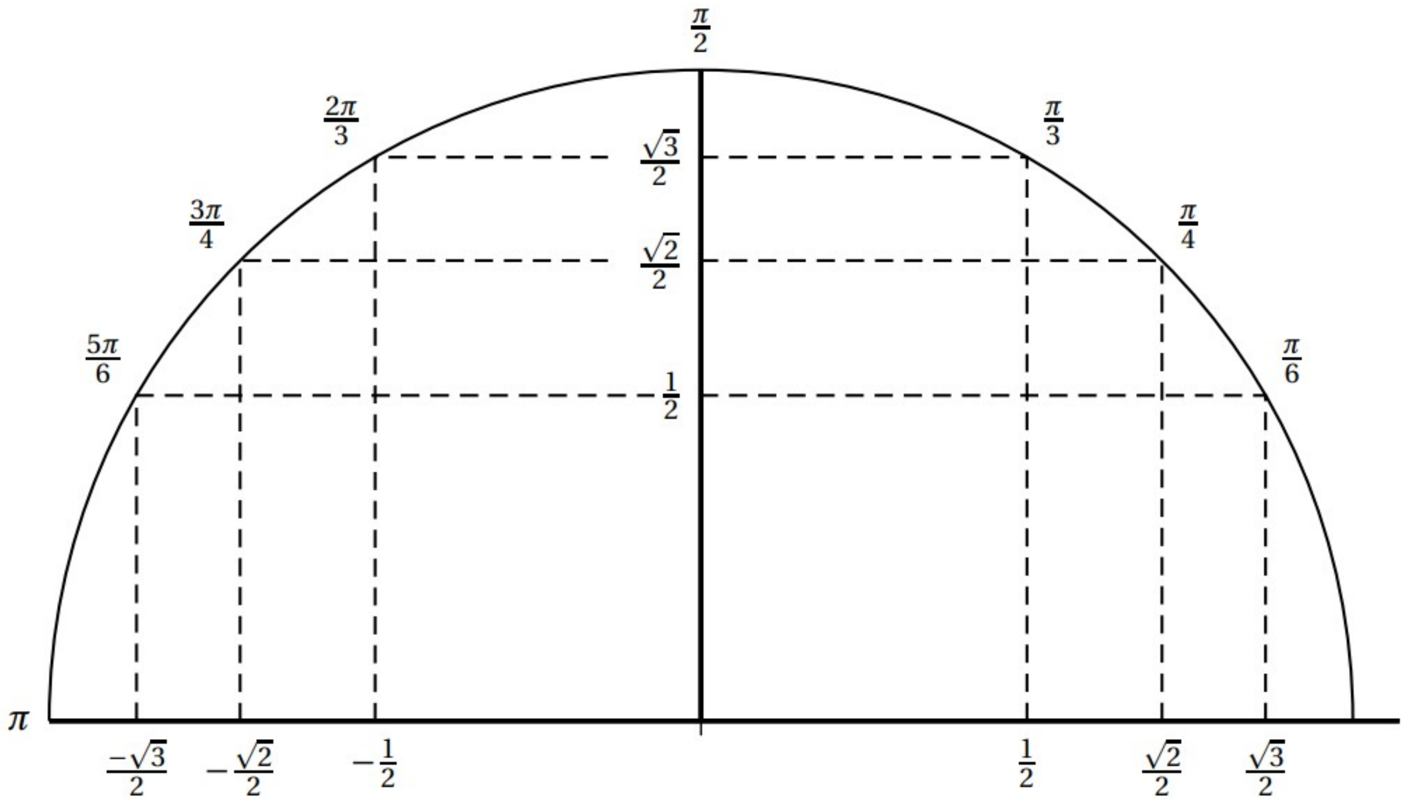
Le point M d'affixe z_M vérifie les conditions suivantes :

- M appartient au cercle de centre O et de rayon 6 ;
- la partie réelle de z_M est négative ;
- la partie imaginaire de z_M est égale à 3.

1. Soit θ la mesure dans $[0\,;\,2\pi[$ de l'argument du nombre complexe z_M.
   Déterminer $\sin(\theta)$.
   D'après le texte, $z_{\mathrm{M}}=x_{\mathrm{M}}+3\imath$, et $\mathrm{OM}=|z_{\mathrm{M}}|=6$.
   $z_{\mathrm{M}}=|z_{\mathrm{M}}|\left(\cos(\theta)+\imath\sin(\theta)\right)$ donc $z_{\mathrm{M}}=6\left(\cos(\theta)+\imath\sin(\theta)\right)$.
   En égalisant les parties imaginaires, on déduit $3=6\sin(\theta)$ donc $\sin(\theta)=\dfrac{1}{2}$.
2. À l'aide du demi-cercle trigonométrique ci-dessous, donner la valeur exacte de θ. Justifier.
   $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ou $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.
   La partie réelle de z_{M} vaut alors $6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ qui est positive, ou $6\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ qui est négative.

Comme on sait que cette partie réelle est négative, on a donc : $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

3. En déduire l'écriture exponentielle de z_M.
   L'écriture exponentielle de z_{M} est donc : $6\,\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.



Exercice 5.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient z_1 et z_2 les nombres complexes définis par :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Écrire z_1 sous forme exponentielle, en détaillant les calculs.
   Une forme exponentielle d'un nombre complexe z non nul est $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   $|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = 2$
   $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Il en résulte $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
   Une écriture sous forme exponentielle de z est , par conséquent $z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. Montrer que $2z_2^3 = z_1$.

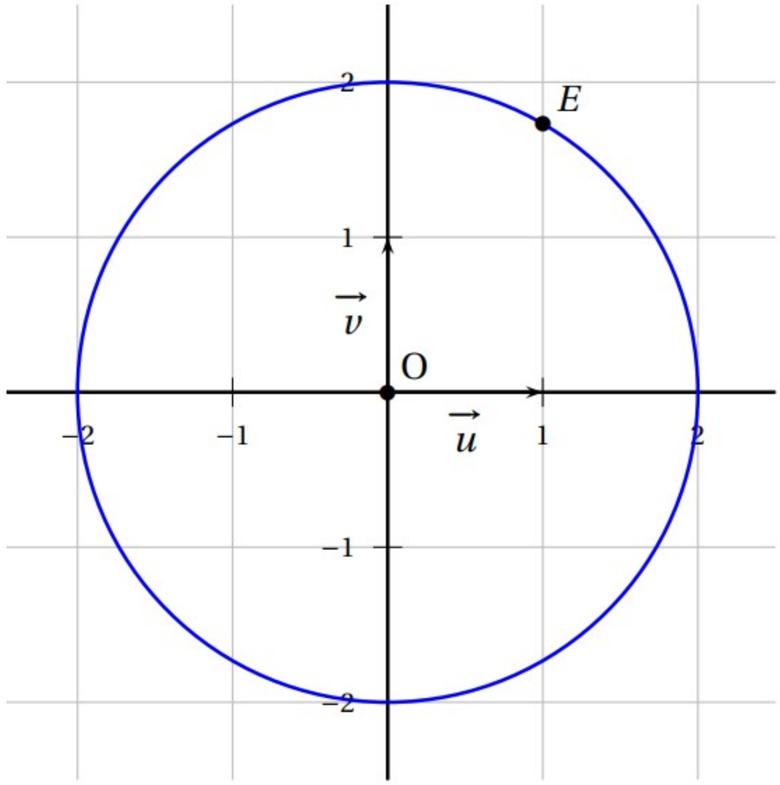
$$2z_2^3 = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 2\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = z_1$$

Exercice 6.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Sur le graphique suivant, on considère le point E dont l'affixe est notée : Z_E.



Par lecture graphique, donner l'écriture exponentielle de Z_E.

$$z_{\text{E}} = 2\,\text{e}^{\,\text{i}\frac{\pi}{3}}$$

Appelons A le point de coordonnées $(2~,~0)$. Le point E appartient à la médiatrice de [OA].

Nous avons donc EO = EA = 2, puisque OE est le rayon du cercle. Le triangle OEA est donc équilatéral. Une mesure de ses angles est $\dfrac{\pi}{3}$rad.

Exercice 7.

Soit le nombre complexe $z = -1 + \text{i}$.

1. Montrer que $z = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

- $|z| = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Donc $z = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

  Le nombre z a pour argument le réel θ tel que $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc on peut prendre $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

L'écriture exponentielle de z est donc $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

2. Quelle est la partie imaginaire de z^4 ? Justifier.
   $z^4 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\times 4} = 4 \times \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi} = 4 \times (-1) = -4$
   Donc la partie imaginaire de z^4 est 0.

Exercice 8.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}.$$

1. Mettre z sous forme algébrique. Détailler les calculs.
2. Mettre z sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

1. On écrit, en multipliant numérateur et dénominateur par $-\mathrm{i}$:

$$z = \frac{(-1+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{(3\mathrm{i})(-\mathrm{i})} = \frac{-(-\mathrm{i})-\mathrm{i}^2}{-3\mathrm{i}^2} = \frac{\mathrm{i}+1}{3} = \frac{1}{3} + \mathrm{i}\frac{1}{3}.$$

2. Le module de z est

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

   Soit $u = \dfrac{z}{|z|}$. Ce nombre complexe, de module 1, a le même argument que z.
   On a

$$u = \frac{\frac{1}{3}+\mathrm{i}\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \left(\frac{1}{3}+\mathrm{i}\frac{1}{3}\right)\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Un argument de u est donc θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On prend $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi, sous forme exponentielle, on a $z = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 9.

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

La tension u, exprimée en volt, aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t, exprimé en seconde, est donnée par : $u(t) = \cos(50t) + \mathrm{i}\sqrt{3}\sin(50t)$.

1. Pour tout nombre réel t, écrire $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ où :
   - $U_{\max}$ représente la tension maximale (exprimée en volt) ;
   - ω représente la pulsation (exprimée en rad.s^{-1}) ;
   - φ représente le déphasage (exprimé en rad).
2. En déduire la fréquence correspondante $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz. Arrondir le résultat à l'unité.

1. Soit z le nombre complexe défini par $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Ce nombre complexe a pour module $|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Par ailleurs, le nombre complexe
$$\frac{z}{|z|} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$
est de module 1 et admet pour argument un nombre ψ tel que $\cos\psi = \frac{1}{2}$ et $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\psi = \frac{\pi}{3}$ comme argument principal. Ce nombre ψ est aussi un argument de z.
Alors, il suffit de prendre $U_{\max} = |z| = 2$, $\omega = 50$ et $\varphi = -\psi = -\frac{\pi}{3}$ pour obtenir

la bonne expression. En effet,

$$\begin{aligned} 2\cos\left(50t-\frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\cos(50t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(50t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= 2\left(\cos(50t)\times\frac{1}{2}+\sin(50t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \cos(50t)\times 1+\sin(50t)\times\sqrt{3}\\ &= U(t). \end{aligned}$$

2. Il suffit de calculer $f=\dfrac{50}{2\pi}=\dfrac{25}{\pi}\simeq 8$ Hz, une fois arrondi à l'unité.

Exercice 10.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A et B les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{\text{B}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Les points A et B sont correctement représentés sur l'une des figures ci-dessous. Laquelle ? Aucune justification n'est attendue.

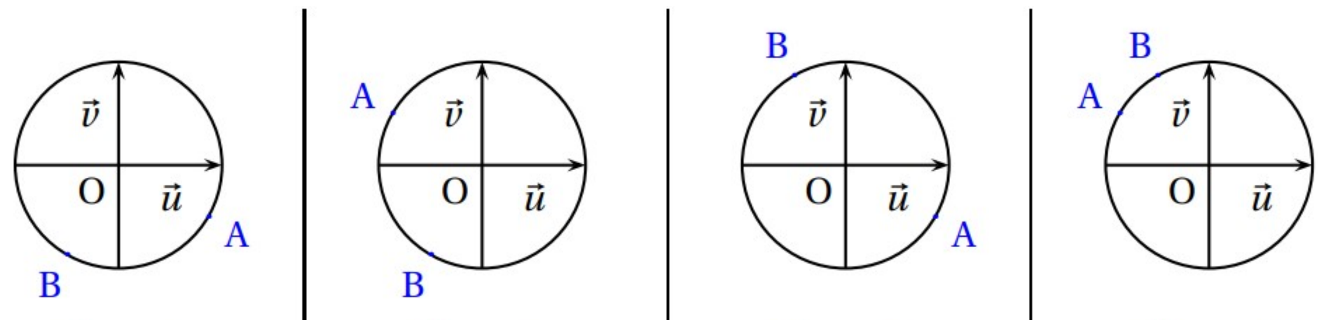


Figure 1 **Figure 2** **Figure 3** **Figure 4**

2. Montrer qu'un argument de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est $\dfrac{-\pi}{2}$.

1. Pour z_{A} : puisque un argument est $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$: A appartient au deuxième quadrant, donc 2 et 4 sont possibles.

Pour z_{B} : puisque un argument est $-\frac{2\pi}{3}=-\pi+\frac{\pi}{3}$ B appartient au troisième cadran : il ne reste que la figure 2.

2. $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}=\dfrac{\text{e}^{\,i\frac{5\pi}{6}}}{\text{e}^{\,-i\frac{2\pi}{3}}}=\text{e}^{\,i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\text{e}^{\,i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)}=\text{e}^{\,i\left(\frac{9\pi}{6}\right)}=\text{e}^{\,i\frac{3\pi}{2}}=\text{e}^{\,i\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=\text{e}^{\,i\frac{-\pi}{2}}.$

Exercice 11.

Rappel : Pour a et b deux réels, nous avons les formules suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + \sin(a)\,\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\,\cos(b) + \cos(a)\,\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\,\cos(b) - \cos(a)\,\sin(b)$$

On considère un signal électrique dont l'expression en fonction du temps t est donnée par :

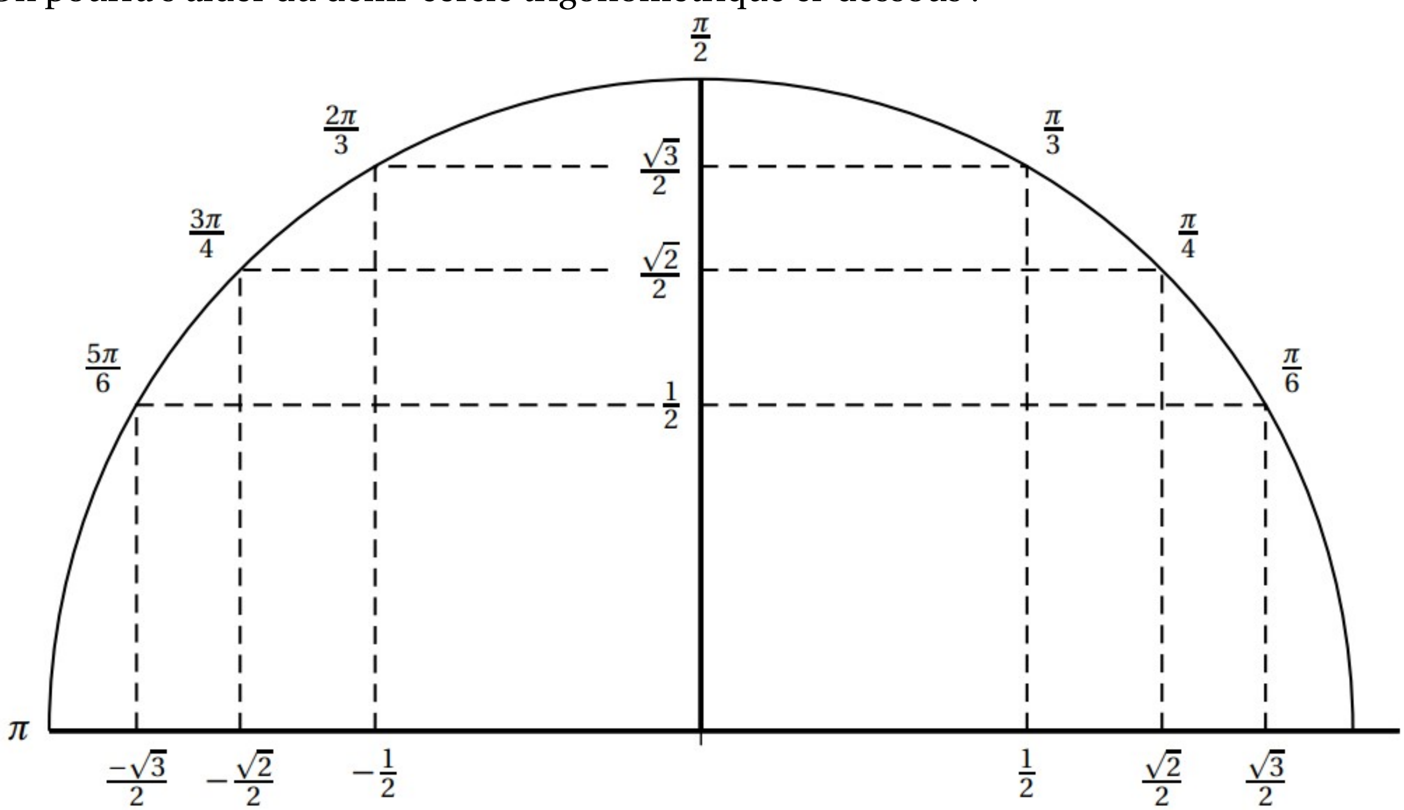
$$u(t) = \sqrt{3}\,\cos(t) - \sin(t)\,.$$

1. Montrer que le signal u peut s'écrire pour tout t réel sous la forme :

$$u(t) = 2\,\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Résoudre dans $[0\,;\,\pi[$, l'équation $u(t) = 1$.

On pourra s'aider du demi-cercle trigonométrique ci-dessous :



1. Par application de la première formule, on peut écrire :

$u(t) = \sqrt{3}\,\cos(t) - \sin(t) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(t) - \dfrac{1}{2}\sin(t)\right)$, soit puisque $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$,

$u(t) = 2\left(\cos t \cos \dfrac{\pi}{6} - \sin t \sin \dfrac{\pi}{6}\right)$, d'où par application de la troisième formule, on peut écrire :
$u(t) = 2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. $u(t) = 1 \iff 2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \iff \cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$
d'où deux possibilités :
$$\left\{\begin{array}{l} t+\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ t+\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ t = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ t = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.$$
$S = \left\{\dfrac{\pi}{6} ~;~ -\dfrac{\pi}{2}\right\}$ à $2k\pi$ près.

Exercice 12.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$:
On pose $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z' = -\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z. Détailler les calculs.
2. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z}{z'}$.

1. • On a $|z|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z| = 2$;
   • Donc $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
2. Tout d'abord $z' = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$. Donc
$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{17\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

Exercice 13.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$,

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

1. Sur $\mathbb{R}$, on a :
   $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$;
   $f'(x)=\cos(x)-\sin(x)$;
   $f''(x)=-\sin(x)-\cos(x)$.
   Donc $f''(x)+f(x)=0 \iff f$ est solution d' équation différentielle $y''+y=0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
   D'après le formulaire :
   $g(x)=\sqrt{2}\left(\cos(x)\cos\frac{\pi}{4}+\sin(x)\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$
   $\cos(x)\times\frac{2}{2}+\sin(x)\times\frac{2}{2}=\cos(x)+\sin(x)=f(x)$.
   On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 14.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}}=3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Les points O, A et B sont-ils alignés ?

Les points O, A et B sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{OA}$ a pour affixe z_{A} et $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe z_{B}.

$$z_{\mathrm{A}}=3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=3\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{2}z_{\mathrm{B}}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, et donc les points O, A et B sont alignés.

Exercice 15.

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, dépendant du temps t, exprimé en seconde, est donnée à l'instant t par :

$$u(t) = 120\cos(70t) - 120\sin(70t).$$

1. Montrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $u(t) = 120\sqrt{2}\cos\left(70t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. En déduire la fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le générateur, où ω désigne la pulsation.
   On arrondira le résultat à l'unité.

1. Pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$$\begin{aligned}120\sqrt{2}\cos\left(70t+\frac{\pi}{4}\right) &= 120\sqrt{2}\left(\cos(70t)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin(70t)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 120\sqrt{2}\left(\cos(70t)\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(70t)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= 120\cos(70t) - 120\sin(70t)\\ &= u(t)\end{aligned}$$
2. On déduit de la question précédente que la pulsation ω est égale à 70 et que la fréquence f est égale à $\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{70}{2\pi} \approx 11$.

Exercice 16.

On considère le nombre complexe $z = \dfrac{2-\text{i}}{1-3\text{i}}$.

Vrai ou faux :
« Le nombre complexe z^4 est un nombre réel négatif. »

$$z = \frac{2-\text{i}}{1-3\text{i}} = \frac{(2-\imath)(1+3\imath)}{(1-3\imath)(1+3\imath)} = \frac{2-\imath+6\imath-3\imath^2}{1-(3\imath)^2} = \frac{5+5\imath}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath$$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{4}}$

$z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \mathrm{e}^{4\times\imath\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\imath\pi} = -\frac{1}{4}$

Affirmation vraie

Exercice 17.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 4 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = -4\mathrm{i}.$$

Vrai ou faux : « Le triangle ABC est rectangle et isocèle. »

$\mathrm{AB}^2 = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + \left(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}\right)^2 = (4-(-1))^2 + (2-1)^2 = 25 + 1 = 26$

$\mathrm{AC}^2 = (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}})^2 + \left(y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}}\right)^2 = (0-(-1))^2 + (-4-1)^2 = 1 + 25 = 26$

On peut donc dire que le triangle ABC est isocèle en A.

$\mathrm{BC}^2 = (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}})^2 + \left(y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{B}}\right)^2 = (0-4)^2 + (-4-2)^2 = 16 + 36 = 52$

Or $52 = 26 + 26$ donc $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

On peut donc dire que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

Affirmation vraie