Annales baccalauréat STI2D
Équations différentielles

Exercice 1. Métropole, Antilles-Guyane 19 juin 2024

Un parachutiste est en chute libre dans l'air jusqu'à l'instant $t = 0$ où il ouvre son parachute. Sa vitesse est alors de 50 $m.s^{-1}$. On admet par la suite que sa vitesse v, en $m.s^{-1}$, en fonction du temps t, en s, est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$(E): \quad y' = -5y + 10.$$

Question 1

La fonction constante g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 2$ est-elle une solution de l'équation différentielle (E) ? Justifier la réponse.

Question 2

Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = ke^{-5t} + 2$, où k est un nombre réel donné.

Question 3

En admettant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction v est donnée sur $[0\,;\,+\infty[$ par $v(t) = 48e^{-5t} + 2$.

Question 4

La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale :

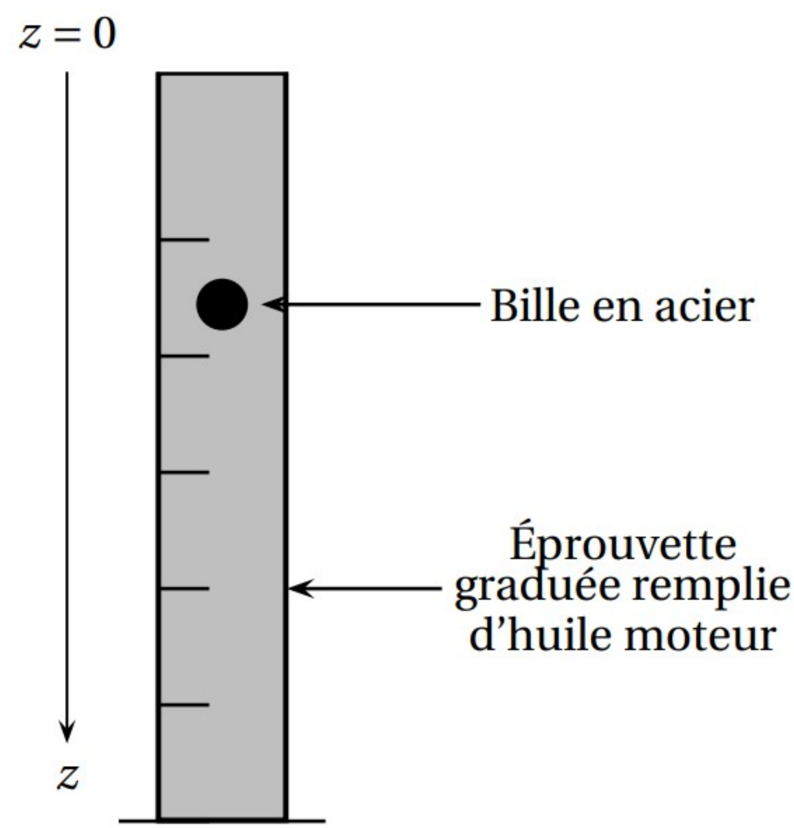
$$\int_0^{10} \left(48e^{-5t} + 2\right) \mathrm{dt}$$

Calculer cette intégrale (arrondir à 10^{-1}).

Exercice 2. Métropole, Antilles-Guyane 20 mars 2023

Le viscosimètre à chute de bille

La viscosité d'une huile, notée v, est un paramètre exprimé en $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$, dont la connaissance est essentielle pour toute utilisation de cette huile.
Cet exercice propose un exemple de méthode de mesure de la valeur de la viscosité d'une huile de moteur Diesel du commerce.
Pour réaliser cette mesure, on utilise un « viscosimètre à chute de bille », constitué d'une éprouvette remplie d'huile de moteur dans laquelle est lâchée une bille métallique sphérique.
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et la bille est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $z = 0$.



Données :

- Rayon de la bille utilisée : $R = 1,1$ cm.
- Volume de la bille : $V = 5,6\ cm^3 = 5,6 \times 10^{-6}\ m^3$.
- Masse de la bille métallique : $m = 20,1$ g.
- Masse volumique de l'huile étudiée : $\rho_{huile} = 8,40 \times 10^2 kg \cdot m^{-3}$.
- Intensité de la gravitation : $g = 9,8 m.s^{-2}$.

Les forces exercées sur la bille métallique sont :

- La poussée d'Archimède, notée $\overrightarrow{P_A}$ de même direction que le poids $\overrightarrow{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est $P_A = \rho_{huile} V g$, où ρ_{huile} est la masse volumique de l'huile.

— La force de frottement fluide exercée par l'huile sur la bille est notée $\overrightarrow{f}$. Elle est ici de même direction que le poids $\overrightarrow{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est donnée par la relation $f = 6\pi\eta R v$, où v est la valeur de la vitesse de la bille, η est la viscosité de l'huile et R le rayon de la bille.

3. On note v la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme la projection du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ sur l'axe $(\mathrm{O}z)$.

Montrer que v vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{6\pi\eta R v}{m} + g - \frac{\rho_{\text{huile}} V g}{m}.$$

En explicitant les valeurs numériques, on admet que v est solution de l'équation différentielle (E) suivante où $v(t)$ est exprimée en m.s^{-1} et t en s :

$$(E) : \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6,8v + 7,5.$$

4. Au début de l'expérience, la bille est introduite dans l'éprouvette avec une vitesse nulle.

Démontrer que la solution v de cette équation sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant cette condition initiale est définie par :

$$v(t) = -\frac{75}{68}\mathrm{e}^{-6,8t} + \frac{75}{68}.$$

5. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t)$ notée v_{lim} exprimée en m.s^{-1}.

6. On mesure expérimentalement une vitesse limite $v_{\text{lim}} = 1,1$ m.s^{-1}.

On peut en déduire la valeur de la viscosité η par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\left(m - \rho_{\text{huile}} V\right) g}{6\pi R v_{\text{lim}}}.$$

Calculer cette valeur et comparer le résultat à la valeur $\eta = 0,66\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$ fournie par le fabricant.

Exercice 3. Mexique mars 2023

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' = -2y + 40.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 200$.

Exercice 4. La Réunion 28 mars 2023

Critère n° 1 : la variation de température d'une boisson doit être inférieure ou égale à 5 °C avec une tolérance de $0,5$ °C au bout de 8 heures pour une température extérieure de $\theta_{\text{ext}} = 20,0$ °C.
On souhaite vérifier le critère n° 1 dans le cas d'une boisson chaude.

L'évolution de la température (en °C) de la boisson en fonction du temps (en heure) est modélisée par la fonction f solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad y' = -0,044y + 0,88$$

où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
7. Sachant que la température initiale de la boisson est de 60°C, montrer que f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 40\mathrm{e}^{-0,044t} + 20.$$

8. En déduire la température de la boisson au bout de 8 heures.
   Indiquer si le critère n° 1 est vérifié.

Exercice 5. Nouvelle-Calédonie 9 septembre 2023

Montée en température du moteur

La température du moteur (exprimée en °C) est modélisée par une fonction θ dépendant du temps (exprimé en secondes) écoulé depuis le démarrage du moteur.
On admet que la fonction θ, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle suivante :

$$y' = -\frac{1}{180}y + \frac{4}{9}.$$

7. Déterminer les solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$ de cette équation différentielle.
   À $t = 0$, la température du moteur est de 20° C.
8. Montrer alors que la fonction θ est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\theta(t) = 80 - 60e^{-\frac{1}{180}t}.$$

9. Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $\theta(t) = 79$.

   Le changement de carburant ne doit pas modifier la montée en température du moteur. La température optimale de fonctionnement du moteur est de 79 ° *C.*
   Cette température doit être atteinte en moins de vingt minutes.

10. Indiquer si cette condition est respectée.

Exercice 6. Métropole, Antilles-Guyane 12 septembre 2023

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = 2y + 0,5$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Exercice 7. Polynésie 4 mai 2022

Une entreprise réalise des bouchons par injection plastique. On modélise la température (en degré Celsius) d'un bouchon plastique à l'issue de sa fabrication, en fonction du temps t (en seconde) par l'équation différentielle :

$$y' = -0,1y + 7.$$

Montrer que la fonction θ définie par $\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0,1t} + 70$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

Exercice 8. Métropole — La Réunion 11 mai 2022

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad 2y' + y = 0,$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Le plan est muni d'un repère.
   Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans ce repère passe par le point A(ln(9) ; 1).

Exercice 9. Centres étrangers 18 mai 2022

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -y + 2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

Exercice 10. Métropole — Antilles-Guyane 8 septembre 2022

La température d'un four, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t, exprimé en minute, est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,2y + 44$.

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. On suppose que la température initiale du four est 25°C. En prenant $f(0) = 25$, donner une expression de $f(t)$, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 11. Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Dans cet exercice, on modélise la vitesse du parachutiste $\left(\text{en m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$, en fonction du temps t écoulé (en seconde) depuis le largage, par la fonction v, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -0,16v(t) + 9,81.$$

On suppose que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = \dfrac{981}{16}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,16t}\right)$, pour t réel positif.
La brochure commerciale présentant le saut en parachute indique que le parachutiste atteint la vitesse de 200 *km·h*$^{-1}$ *en moins de quarante secondes.*

2. Convertir 200 km·h^{-1} en mètre par seconde $\left(\text{en m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$.

3. Valider ou infirmer l'indication de la brochure.

Exercice 12. Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Loi de refroidissement de Newton

Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter.

Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est correcte.
Pour les quatre questions traitées, indiquer sur la copie l'affirmation choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte un point.
Une réponse incorrecte, une réponse multiple, une absence de réponse, ne rapportent ni n'enlèvent de point.

La loi de refroidissement de Newton indique que la vitesse de refroidissement d'un matériau est proportionnelle à la différence entre la température θ (en degré Celsius) de ce matériau à l'instant t (en minute) et la température A constante de l'air ambiant.
Cela se traduit par la relation

$$\theta'(t) = \alpha(\theta(t) - A),$$

où θ est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ modélisant la température du matériau en fonction du temps t, en prenant comme origine du temps l'instant où la pièce en acier est mise à refroidir.
La valeur du coefficient α, qui est négatif, dépend du matériau.

Une pièce en acier, initialement à la température de 600° C, est mise à refroidir à l'air libre dans une pièce à 20° C. Pour cet acier, α vaut $-0,1$.

1. La fonction θ est solution de l'équation différentielle :

a. $y = -0,1y' + 2$ **b.** $y = -0,1y' + 20$
c. $y' = -0,1y + 2$ **d.** $y' = 0,1y + 20$

Pour l'ensemble des questions suivantes, on admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction θ est définie par :

$$\theta(t) = 580\mathrm{e}^{-0,1t} + 20.$$

2. La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction θ au point d'abscisse 10 vaut :

a. $-\dfrac{58}{\mathrm{e}}$ **b.** $580\mathrm{e}^{-1} + 20$
c. $-\dfrac{58}{\mathrm{e}} + 20$ **d.** $\dfrac{580}{\mathrm{e}}$

3. Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction θ est :

a. croissante **b.** décroissante
c. croissante puis décroissante **d.** constante

4. La limite en $+\infty$ de $\theta(t)$ est :

a. 20 **b.** 580
c. $-\infty$ **d.** $+\infty$

La pièce peut être manipulée lorsque sa température devient inférieure à 40 ° C. Pour déterminer la durée minimale d'attente (en minutes), à compter de l'instant où elle est mise à refroidir, on veut mettre en place un algorithme de balayage, écrit en langage Python.

```
from math import exp

def duree_d_attente ( ) :
    t = 0
    Temperature = 600
    ………
        t = t + 1
        Temperature = 580 * exp(- 0,1*t) + 20
    return t
```

5. Pour que la valeur renvoyée par la fonction **duree_d_attente** soit la valeur entière minimale de la durée d'attente, la ligne 6 contient :

a. while $t > 40$:

b. while Temperature > 40 :

c. while Temperature < 40 :

d. for i in range(Temperature) :

6. L'inéquation $\theta(t) < 40$, d'inconnue t, admet comme ensemble solution sur $[0\ ;\ +\infty[$:

a. l'intervalle $\left[0\ ;\ 10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$

b. l'intervalle $\left[-10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\ ;\ +\infty\right[$

c. l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{10}{29}\right]$

d. l'ensemble vide (pas de solution)

Corrigé