

Annales baccalauréat STI2D

Équations différentielles

Exercice 1.

Un parachutiste est en chute libre dans l'air jusqu'à l'instant $t = 0$ où il ouvre son parachute. Sa vitesse est alors de 50 m.s^{-1} . On admet par la suite que sa vitesse v , en m.s^{-1} , en fonction du temps t , en s, est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$(E) : y' = -5y + 10.$$

Question 1

Soit g la fonction constante définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 2$.

$g'(t) = 0$ et $-5g(t) + 10 = -5 \times 2 + 10 = 0$ donc $g'(t) = -5g(t) + 10$.

Donc g est solution de l'équation différentielle (E).

Question 2

D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k e^{at}$, où k est un nombre réel quelconque, donc les solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k e^{-5t}$, où k est un nombre réel quelconque.

Une solution de l'équation différentielle $y' = -5y + 10$ est la somme d'une solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ et d'une solution constante de l'équation différentielle $y' = -5y + 10$, donc les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k e^{-5t} + 2$, où k est un nombre réel quelconque.

Question 3

On sait que v est solution de (E) et que $v(0) = 50$; donc $k e^0 + 2 = 50$ donc $k = 48$.

La fonction v est donc donnée sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = 48 e^{-5t} + 2$.

Question 4

La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale : $\int_0^{10} (48 e^{-5t} + 2) dt$.
Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction v .

La fonction $t \mapsto e^{at}$ avec $a \neq 0$, a pour primitive la fonction $t \mapsto \frac{e^{at}}{a}$, donc la fonction v a pour primitive la fonction V définie par $V(t) = 48 \frac{e^{-5t}}{-5} + 2t$ soit $V(t) = -9,6 e^{-5t} + 2t$.

$$\int_0^{10} (48 e^{-5t} + 2) dt = [V(t)]_0^{10} = V(10) - V(0) = (-9,6 e^{-5 \times 10} + 2 \times 10) - (-9,6 e^{-5 \times 0} + 2 \times 0)$$

$$= -9,6 e^{-50} + 20 + 9,6 = 29,6 - 9,6 e^{-50} \approx 29,6$$

Exercice 2.

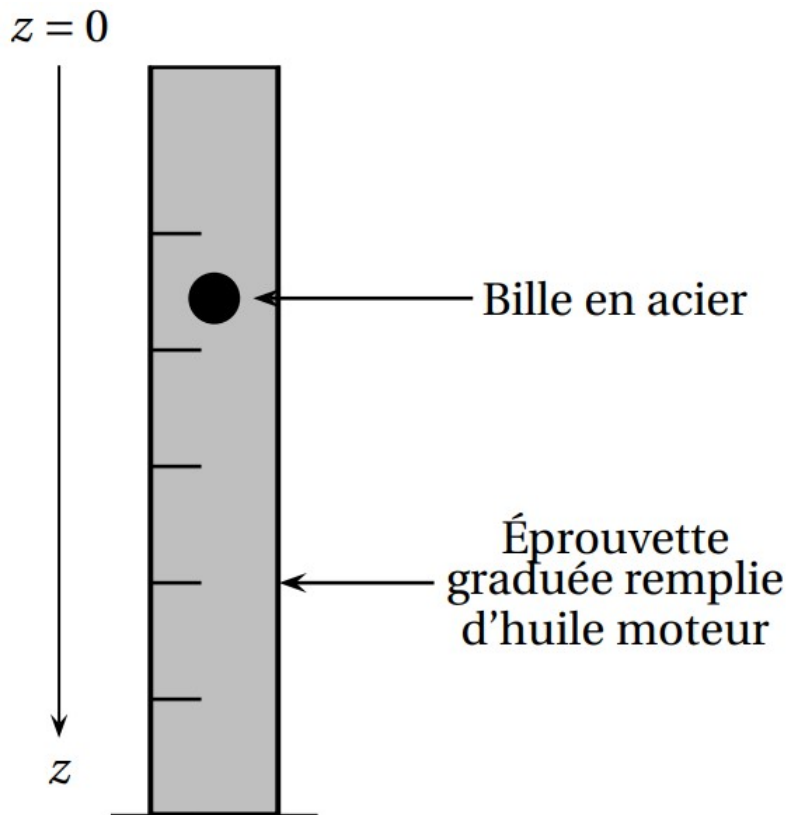
Le viscosimètre à chute de bille

La viscosité d'une huile, notée ν , est un paramètre exprimé en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, dont la connaissance est essentielle pour toute utilisation de cette huile.

Cet exercice propose un exemple de méthode de mesure de la valeur de la viscosité d'une huile de moteur Diesel du commerce.

Pour réaliser cette mesure, on utilise un « viscosimètre à chute de bille », constitué d'une éprouvette remplie d'huile de moteur dans laquelle est lâchée une bille métallique sphérique.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et la bille est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $z = 0$.



Données :

- Rayon de la bille utilisée : $R = 1,1 \text{ cm}$.
- Volume de la bille : $V = 5,6 \text{ cm}^3 = 5,6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$.
- Masse de la bille métallique : $m = 20,1 \text{ g}$.
- Masse volumique de l'huile étudiée : $\rho_{\text{huile}} = 8,40 \times 10^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- Intensité de la gravitation : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Les forces exercées sur la bille métallique sont :

- La poussée d'Archimède, notée $\vec{P}_A$ de même direction que le poids $\vec{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est $P_A = \rho_{\text{huile}} V g$, où ρ_{huile} est la masse volumique de l'huile.
- La force de frottement fluide exercée par l'huile sur la bille est notée $\vec{f}$. Elle est ici de même direction que le poids $\vec{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est donnée par la relation $f = 6\pi\eta R v$, où v est la valeur de la vitesse de la bille, η est la viscosité de l'huile et R le rayon de la bille.

3. On note v la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ comme la projection du vecteur vitesse $\vec{v}$ sur l'axe (Oz).

La seconde loi de Newton donne sur l'axe Oz :

$$m \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta R v + mg - \rho_{\text{huile}} V g, \text{ d'où puisque } m \neq 0 :$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi\eta R v}{m} + g - \frac{\rho_{\text{huile}} V g}{m}.$$

En explicitant les valeurs numériques, on admet que v est solution de l'équation différentielle (E) suivante où $v(t)$ est exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et t en s :

$$(E) : \quad \frac{dv}{dt} = -6,8v + 7,5.$$

4. • Les solutions de l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt} + 6,8v = 0$, sont définies par :

$$v(t) = K e^{-6,8t}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

- Une solution particulière constante de cette équation est donnée par $\frac{dv}{dt} = 0 \iff -6,8v + 7,5 = 0 \iff v = \frac{7,5}{6,8} = \frac{75}{68}$.

La solution générale de cette équation différentielle est donc donnée par :

$$v(t) = K e^{-6,8t} + \frac{75}{68} \text{ et comme } v(0) = 0 \iff K + \frac{75}{68} = 0 \iff K = -\frac{75}{68}, \text{ soit finalement :}$$

$$v(t) = -\frac{75}{68} e^{-6,8t} + \frac{75}{68}.$$

5. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-6,8t} = 0$ et également que $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{75}{68} e^{-6,8t} = 0$, donc par somme de limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_{\text{lim}} = \frac{75}{68}$.
6. On mesure expérimentalement une vitesse limite $v_{\text{lim}} = 1,1 \text{ m.s}^{-1}$.
On peut en déduire la valeur de la viscosité η par la relation suivante :

$$\eta = \frac{(m - \rho_{\text{huile}} V) g}{6\pi R v_{\text{lim}}}$$

On calcule $\eta = \frac{(20,1 \cdot 10^{-3} - 840 \times 5,6 \cdot 10^{-6}) \times 9,81}{(6\pi \times 0,011 \times 1,1)} \approx 0,66 \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

C'est à peu près la valeur fournie par le fabricant.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 40$.

1. L'équation différentielle $y' = ay + b$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k e^{at} - \frac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

Donc l'équation différentielle $y' = -2y + 40$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k e^{-2t} - \frac{40}{-2}$ où k est un réel quelconque, soit les fonctions f définies par $f(t) = k e^{-2t} + 20$.

2. $f(0) = 200 \iff k e^0 + 20 = 200 \iff k = 180$

La solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 200$ est définie par

$$f(t) = 180 e^{-2t} + 40.$$

Exercice 4.

Critère n° 1 : la variation de température d'une boisson doit être inférieure ou égale à 5°C avec une tolérance de $0,5^\circ\text{C}$ au bout de 8 heures pour une température extérieure de $\theta_{\text{ext}} = 20,0^\circ\text{C}$.

On souhaite vérifier le critère n° 1 dans le cas d'une boisson chaude.

L'évolution de la température (en °C) de la boisson en fonction du temps (en heure) est modélisée par la fonction f solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E): y' = -0,044y + 0,88$$

où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

6. • L'équation « sans second membre » $y' = -0,044y$, a pour solutions les fonctions $t \mapsto k \times e^{-0,044t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
• L'équation (E) a pour solution particulière la fonction $t \mapsto \frac{0,88}{0,044}$ soit $t \mapsto 20$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions f définies par $f(t) = k \times e^{-0,044t} + 20$ où $k \in \mathbb{R}$.

7. $f(t) = 40e^{-0,044t} + 20$. La température initiale de la boisson est de 60 °C donc $f(0) = 60 \iff k \times e^{-0,044t} + 20 = 60 \iff k + 20 = 60 \iff k = 40$.

Donc la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 40e^{-0,044t} + 20$.

8. La température de la boisson au bout de 8 heures est : $f(8) = 40e^{-0,044 \times 8} + 20 \approx 48,1$.

La variation de température est donc en degrés d'environ $60 - 48,1$ soit 11,9 qui est supérieure à 5°. Le critère n° 1 n'est donc pas vérifié.

Exercice 5.

Montée en température du moteur

La température du moteur (exprimée en °C) est modélisée par une fonction θ dépendant du temps (exprimé en secondes) écoulé depuis le démarrage du moteur.

On admet que la fonction θ , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle suivante :

$$y' = -\frac{1}{180}y + \frac{4}{9}.$$

7. Déterminons les solutions sur $[0 ; +\infty[$ de cette équation différentielle.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par

$y(x) = C e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = \frac{1}{180}$ $b = \frac{4}{9}$ par conséquent sur $[0 ; +\infty[$ $y(t) = C e^{-\frac{1}{180}t} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{180}}$

c'est-à-dire $\theta(t) = C e^{-\frac{1}{180}t} + 80$ où C est une constante quelconque.

À $t = 0$, la température du moteur est de 20°C .

8. Déterminons C pour que la condition initiale soit vérifiée.

$$\theta(0) = 20 \text{ ou } C e^0 + 80 = 20 \text{ d'où } C = 20 - 80 = -60.$$

La fonction θ est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\theta(t) = 80 - 60 e^{-\frac{1}{180}t}.$$

9. Résolvons sur $[0 ; +\infty[$ l'équation $\theta(t) = 79$.

$$80 - 60 e^{-\frac{1}{180}t} = 79$$

$$-60 e^{-\frac{1}{180}t} = -1$$

$$e^{-\frac{1}{180}t} = \frac{1}{60}$$

$$-\frac{1}{180}t = -\ln 60$$

$$t = \ln 60 \times 180$$

L'ensemble solution de l'équation est $\{180 \ln 60\}$

Le changement de carburant ne doit pas modifier la montée en température du moteur. La température optimale de fonctionnement du moteur est de 79°C .

Cette température doit être atteinte en moins de vingt minutes.

10. Cette condition est respectée, car $180 \times \ln 60 \approx 737$, or à 20 minutes correspondent 1 200 s.

Nous avons bien $737 < 1200$

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = 2y + 0,5$$

où y est une fonction de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y .

Déterminons les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par

$$y(x) = C e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

où C est une constante quelconque.

$$y' = 2y + 0,5 \iff y' - 2y = 0,5 \text{ donc } a = -2, b = 0,5 \text{ par conséquent sur } \mathbb{R} f(x) = C e^{2x} + \frac{0,5}{2}$$

c'est-à-dire $f(x) = C e^{2x} - 0,25$ où C est une constante quelconque.

Exercice 7.

Une entreprise réalise des bouchons par injection plastique. On modélise la température (en degré Celsius) d'un bouchon plastique à l'issue de sa fabrication, en fonction du temps t (en seconde) par l'équation différentielle :

$$y' = -0,1y + 7.$$

On veut montrer que la fonction θ définie par $\theta(t) = 80 e^{-0,1t} + 70$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

- $\theta(t) = 80 e^{-0,1t} + 70$ donc $\theta'(t) = 80 \times (-0,1) e^{-0,1t} = -8 e^{-0,1t}$
Or $-0,1\theta(t) + 7 = -0,1(80 e^{-0,1t} + 70) + 7 = -8 e^{-0,1t} - 7 + 7 = -8 e^{-0,1t} = \theta'(t)$
Donc la fonction θ est solution de l'équation différentielle $y' = -0,1y + 7$.
- $\theta(0) = 80 e^0 + 70 = 80 + 70 = 150$

On peut donc dire que la fonction θ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

Exercice 8.

On considère l'équation différentielle

$$(E): 2y' + y = 0,$$

où y est une fonction de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y .

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2. Le plan est muni d'un repère.

Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans ce repère passe par le point $A(\ln(9); 1)$.

1. On a $2y' + y = 0$ si et seulement si $y' + \frac{1}{2}y = 0$, ou bien si et seulement si $y' = -\frac{1}{2}y$. Les solutions y de cette équation différentielle sont donc de la forme $y = Ce^{-\frac{1}{2}x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Comme $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A: (\ln(9); 1)$, on a $f(\ln(9)) = 1$. En remplaçant x par $\ln(9)$ et y par 1 dans l'expression générale des solutions, il vient

$$1 = Ce^{-\frac{1}{2}\ln(9)}$$

$$1 = Ce^{-\ln(\sqrt{9})}$$

$$1 = Ce^{\ln(\frac{1}{\sqrt{9}})}$$

$$1 = C \frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$\sqrt{9} = C$$

d'où l'on tire $C = 3$, et par suite $f(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x}$.

Exercice 9.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -y + 2$.

1. • Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies par $t \mapsto f(t) = Ke^{-t}$, avec $K \in \mathbb{R}$;

• Soit la solution constante $y = \alpha$ solution de $y' = -y + 2$, donc $y' = 0 = -\alpha + 2 \iff \alpha = 2$.

Conclusion : toutes les solutions sont les fonctions définies par : $t \mapsto f(t) = 2 + Ke^{-t}$, avec $K \in \mathbb{R}$

2. On a $f(0) = 0 \iff 2 + Ke^{-0} = 0 \iff 2 + K = 0 \iff K = -2$.

La solution g telle que $g(0) = 0$ est donc définie par $g(t) = 2 - 2e^{-t}$.

Exercice 10.

La température d'un four, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t , exprimé en minute, est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,2y + 44$.

- On sait que les solutions de l'équation $y' = -0,2y$ sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions du type $t \mapsto \alpha e^{-0,2t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
• Une fonction constante $y = k$ est solution de l'équation différentielle si $y' = 0 = -0,2k + 44 \iff 44 = 0,2k \iff k = 220$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions :

$$t \mapsto \alpha e^{-0,2t} + 220, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Puisque la température est modélisée par la fonction f , définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \alpha e^{-0,2t} + 220$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $f(0) = 25 \iff \alpha e^0 + 220 = 25 \iff \alpha + 220 = 25 \iff \alpha = -195$, on a donc :

$$f(t) = 220 - 195e^{-0,2t}.$$

Exercice 11.

Dans cet exercice, on modélise la vitesse du parachutiste (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), en fonction du temps t écoulé (en seconde) depuis le largage, par la fonction v , solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt}(t) = -0,16v(t) + 9,81.$$

On suppose que $v(0) = 0$.

- Démontrons que $v(t) = \frac{981}{16}(1 - e^{-0,16t})$, pour t réel positif.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par

$$y(x) = C e^{-ax} + \frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est une constante quelconque.}$$

$$a = 0,16 \quad b = 9,81 \text{ par conséquent sur } [0; +\infty[\quad v(t) = C e^{-0,16t} + \frac{9,81}{0,16}$$

$$\text{c'est-à-dire } v(t) = C e^{-0,16t} + \frac{981}{16} \text{ où } C \text{ est une constante quelconque.}$$

Déterminons C à l'aide de la condition initiale $v(0) = 0$.

$$v(0) = C e^{-0,16 \times 0} + \frac{981}{16} = 0 \iff C + \frac{981}{16} = 0 \quad C = -\frac{981}{16}$$

Par conséquent

$$v(t) = -\frac{981}{16} e^{-0,16t} + \frac{981}{16} = \frac{981}{16} (1 - e^{-0,16t}).$$

La brochure commerciale présentant le saut en parachute indique que le parachutiste atteint la vitesse de $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en moins de quarante secondes.

2. Convertissons $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en mètre par seconde (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

$200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est équivalent en mètre par seconde à $\frac{200\,000}{3\,600} \approx 55,55$

3. Valider ou infirmer l'indication de la brochure.

Pour ce faire, déterminons le temps t pour lequel la vitesse est égale à 55,55.

Réolvons

$$\begin{aligned} \frac{981}{16} (1 - e^{-0,16t}) &= 55,55 \\ 1 - e^{-0,16t} &= \frac{55,55 \times 16}{981} \\ e^{-0,16t} &= 1 - \frac{55,55 \times 16}{981} \\ -0,16t &= \ln \left(1 - \frac{55,55 \times 16}{981} \right) \\ t &= -\frac{\ln \left(1 - \frac{55,55 \times 16}{981} \right)}{0,16} \\ t &\approx 14,78 \end{aligned}$$

La brochure indique un temps largement supérieur au temps nécessaire pour atteindre les $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 12.

Loi de refroidissement de Newton

Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter.

Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est correcte.

Pour les quatre questions traitées, indiquer sur la copie l'affirmation choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse correcte rapporte un point.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple, une absence de réponse, ne rapportent ni n'enlèvent de point.

La loi de refroidissement de Newton indique que la vitesse de refroidissement d'un matériau est proportionnelle à la différence entre la température θ (en degré Celsius) de ce matériau à l'instant t (en minute) et la température A constante de l'air ambiant.

Cela se traduit par la relation

$$\theta'(t) = \alpha(\theta(t) - A),$$

où θ est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ modélisant la température du matériau en fonction du temps t , en prenant comme origine du temps l'instant où la pièce en acier est mise à refroidir.

La valeur du coefficient α , qui est négatif, dépend du matériau.

Une pièce en acier, initialement à la température de 600°C , est mise à refroidir à l'air libre dans une pièce à 20°C . Pour cet acier, α vaut $-0,1$.

1. La fonction θ est solution de l'équation différentielle :

a. $y = -0,1y' + 2$

b. $y = -0,1y' + 20$

c. $y' = -0,1y + 2$

d. $y' = 0,1y + 20$

Réponse c.

Pour l'ensemble des questions suivantes, on admet que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction θ est définie par :

$$\theta(t) = 580e^{-0,1t} + 20.$$

2. La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction θ au point d'abscisse 10 vaut :

a. $-\frac{58}{e}$

b. $580e^{-1} + 20$

c. $-\frac{58}{e} + 20$

d. $\frac{580}{e}$

Réponse a.

3. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction θ est :

- a. croissante
- b. décroissante
- c. croissante puis décroissante
- d. constante

Réponse b.

4. La limite en $+\infty$ de $\theta(t)$ est :

- a. 20
- b. 580
- c. $-\infty$
- d. $+\infty$

Réponse a.

La pièce peut être manipulée lorsque sa température devient inférieure à 40° C.

Pour déterminer la durée minimale d'attente (en minutes), à compter de l'instant où elle est mise à refroidir, on veut mettre en place un algorithme de balayage, écrit en langage Python.

```
1  from math import exp
2
3  def duree_d_attente () :
4      t = 0
5      Temperature = 600
6      .....
7      t = t + 1
8      Temperature = 580 * exp(- 0,1*t) + 20
9      return t
```

5. Pour que la valeur renvoyée par la fonction **duree_d_attente** soit la valeur entière minimale de la durée d'attente, la ligne 6 contient :

- a. while $t > 40$:
- b. while Temperature > 40 :
- c. while Temperature < 40 :
- d. for i in range(Temperature) :

Réponse b.

6. L'inéquation $\theta(t) < 40$, d'inconnue t , admet comme ensemble solution sur $[0 ; +\infty[$:

- a. l'intervalle $\left[0 ; 10 \ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$
- b. l'intervalle $\left[-10 \ln\left(\frac{1}{29}\right) ; +\infty\right[$
- c. l'intervalle $\left[0 ; \frac{10}{29}\right]$
- d. l'ensemble vide (pas de solution)

Réponse b.