Annales baccalauréat STI2D
Exponentielle et logarithme

Exercice 1.

La fonction θ, représentée ci-dessous, modélise l'évolution de la température du four (exprimée en degré Celsius) en fonction du temps t (exprimé en minute) écoulé depuis la fin de la pyrolyse. L'instant initial $t = 0$ correspond au début de la phase de refroidissement.

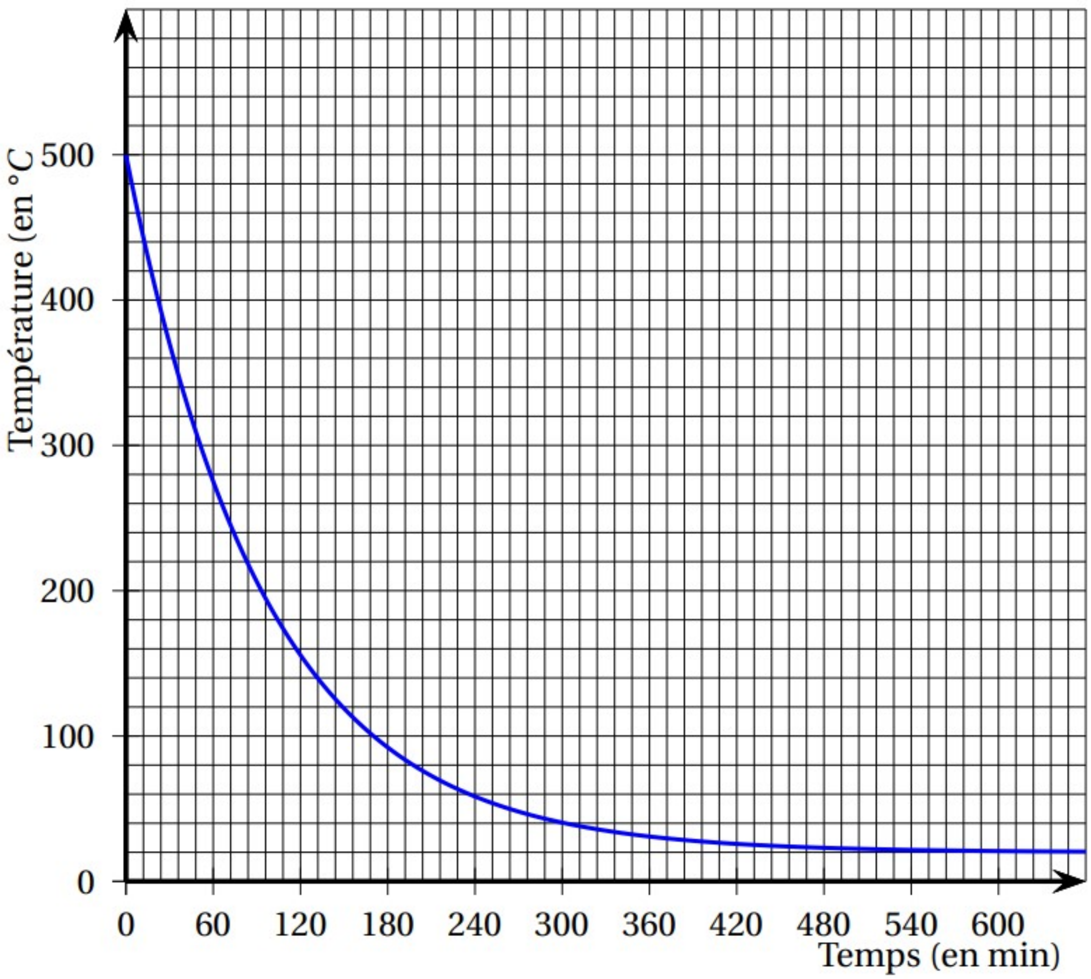


Figure 1 *: évolution de la température en fonction du temps lors de la phase de refroidissement*

1. Il semble que $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = 20$

2. La température après 10 heures de refroidissement va se rapprocher de 20° C

La fonction θ utilisée pour cette modélisation est définie sur $[\,0\,;+\infty[$ par :

$$\theta(t) = 480e^{-\frac{1}{95}t} + 20.$$

3. $\theta(t)=280 \iff 480\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t}+20=280 \iff 480\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t}=260 \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t}=\dfrac{260}{480}=\dfrac{26}{48}=\dfrac{13}{24}$.

   En utilisant la croissance de la fonction logarithme népérien, on a donc :

   $-\dfrac{1}{95}t=\ln\dfrac{13}{24} \iff t=\dfrac{\ln\dfrac{13}{24}}{-\frac{1}{95}}=-95\ln\dfrac{13}{24}$ (environ 58,24 min).

   Pour des raisons de sécurité, le fabricant impose que la porte du four reste verrouillée tant que la température du four est supérieure à 280° C.

4. On a $8,24=58+0,24\times 60\approx 58$ min 14 s.

Exercice 2.

L'évolution de l'effectif de la population d'un pays, exprimé en millions d'habitants, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,40]$ comme suit :

$$f(t)=10\mathrm{e}^{0,02t},$$

où t correspond au nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Le 1er janvier 2020 correspond à $t=0$; $f(0)=10\,\mathrm{e}^{0}=10$.

   Donc le nombre d'habitants donné par ce modèle au 1er janvier 2020 est de 10 millions.

   Le 1er janvier 2021 correspond à $t=1$; $f(1)=10\,\mathrm{e}^{0,02}\approx 10,2$.

   Donc le nombre d'habitants donné par ce modèle au 1er janvier 2021 est d'environ 10,2 millions.

2. Pour déterminer l'année durant laquelle l'effectif de la population dépassera 20 millions d'habitants, on cherche la plus petite valeur de t pour laquelle $f(t)>20$.

   $f(t)>20 \iff 10\,\mathrm{e}^{0,02t}>20 \iff \mathrm{e}^{0,02t}>2 \iff 0,02t>\ln(2) \iff t>\dfrac{\ln(2)}{0,02}$

   $\dfrac{\ln(2)}{0,02}\approx 34,66$ donc c'est au cours de la 34e année, c'est-à-dire en 2054 que l'effectif dépassera 20 millions.

Exercice 3.

On considère un réel x, strictement positif et on note $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Pour tout réel x, strictement positif, $\log(100x)$ est égal à :

A	B	C	D
$10x$	$100\log(x)$	$2+\log(x)$	$10+\log(x)$

$\log(100x) = \log(100) + \log(x) = 10 + \log(x)$

Exercice 4.

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E, peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour

$t \in [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$E(t) = 18\left(1 - \mathrm{e}^{-0,45t}\right).$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à 18 kWh.

Déterminer l'instant t_0, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.

On veut déterminer l'instant t_0, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée, c'est-à-dire tel que $E(t_0) = 9$.

On résout cette équation.

$E(t_0) = 9 \iff 18\left(1 - \mathrm{e}^{-0,45t_0}\right) = 9 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,45t_0} = 0,5 \iff 0,5 = \mathrm{e}^{-0,45t_0}$

$\iff \ln(0,5) = -0,45t_0 \iff -\dfrac{\ln(0,5)}{0,45} = t_0$

Donc $t_0 \approx 1,54$; or $\dfrac{54}{100} = \dfrac{32,4}{60}$ donc le temps cherché est d'environ 1 heure 32 minutes.

Exercice 5.

On considère l'équation :

$$3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5),$$

où x appartient à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Donner, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

a. 0 **b.** e^{-5} **c.** 10 **d.** 20

$$3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5) \iff \ln\left(x^3\right) - \ln(x+30) = \ln\left(5^2\right)$$

$$\iff \ln\left(\frac{x^3}{x+30}\right) = \ln(25)$$

$$\iff \frac{x^3}{x+30} = 25$$

Pour $x = 10$, $\dfrac{x^3}{x+30} = \dfrac{1\,000}{40} = 25$. **Réponse c.**

Exercice 6.

Une horloge au jus d'orange

Pour mettre en évidence le principe de fonctionnement d'une pile, il est possible d'alimenter une horloge grâce à une pile rudimentaire constituée d'une électrode de cuivre et d'une électrode en magnésium plongeant dans du jus d'orange.

En réalisant l'expérience les valeurs suivantes sont relevées :

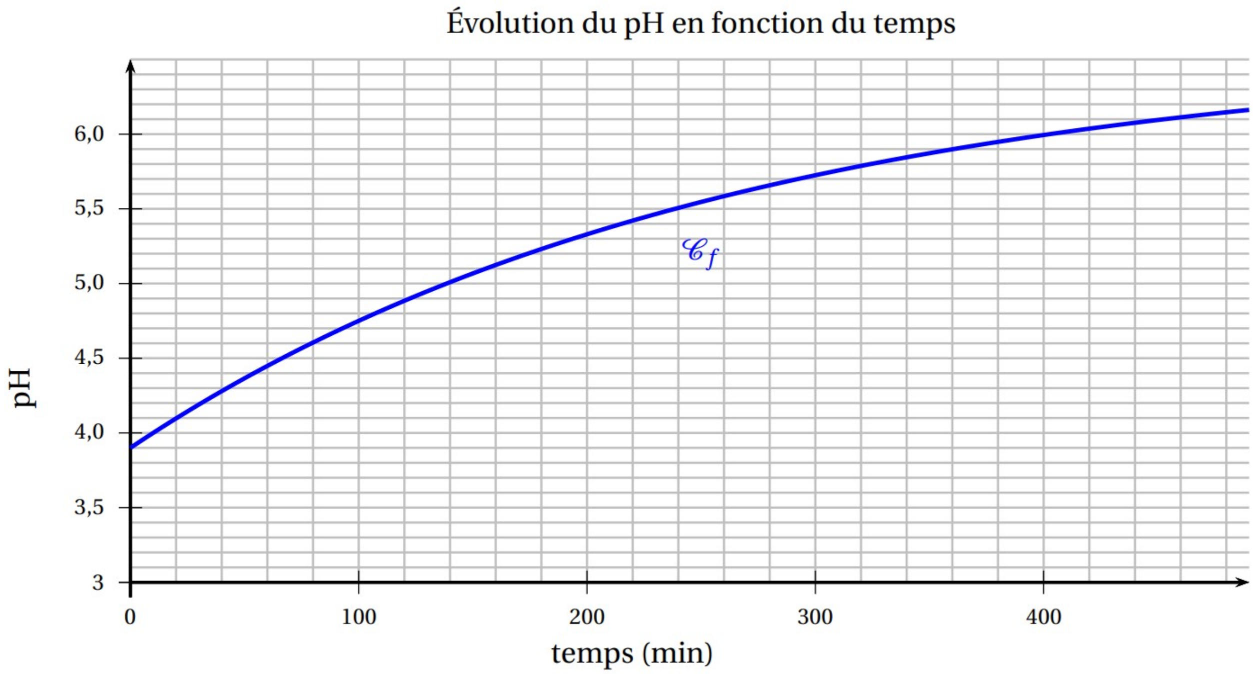
Durée de fonctionnement maximale	Environ 21 h	
Tension	1,52 V	
Intensité du courant électrique	0,3 mA	
pH du jus d'orange au début et à la fin de l'expérience	Début : 3,9	Fin : 6,5
Volume du jus d'orange	140 mL	

Le but de cet exercice est de modéliser le fonctionnement de cette pile à l'aide d'un modèle mathématique en cohérence avec les résultats expérimentaux mesurés.

On note t le temps, exprimé en minute, écoulé depuis la mise en fonctionnement de la pile au jus d'orange.
À l'aide d'une étude expérimentale, la valeur du pH en fonction du temps peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 6,571 - 2,671e^{-\frac{t}{261}}.$$

Une représentation graphique de f est donnée ci-dessous.



1. $f(0) = 6,571 - 2,671\,\mathrm{e}^{-\frac{0}{261}} = 6,571 - 2,671\,\mathrm{e}^{0} = 6,571 - 2,671 = 3,9.$
C'est le pH initial.

2. a. On voit sur le graphique que 5 a pour antécédent 140. Or $140 = 2 \times 60 + 20$.
Le pH est à 5 au bout de 2 heures 20 minutes.
Donner le résultat en heure et minute.

b. Dans $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = 5 \iff 6,571 - 2,671\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} = 5 \iff 6,571 - 5 = 2,671\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} \iff 1,571 = 2,671\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} \iff \dfrac{1,571}{2,671} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{261}}$, puis par croissance de la fonction logarithme népérien ; d'où $\ln\left(\dfrac{1,571}{2,671}\right) = -\dfrac{t}{261}$ et enfin $t = -261\left(\dfrac{1,571}{2,671}\right) \approx 138,52.$
Donc le pH est à 5 au bout de 2 heures 18 minutes et $0,52 \times 60 = 31,2$ s donc environ 2 h 19 min., soit une minute de moins que le résultat trouvé graphiquement.

3. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{261} = -\infty$, donc $\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} \lim\limits_{t\to+\infty} = 0$.
On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 6,571 - 2,671 \times 0 = 6,571$. Ceci est accord avec les valeurs relevées lors de l'expérience.

Exercice 7.

1. Le nombre $\ln(35)$ est égal à :
   $\ln(35) = \ln(5 \times 7) = \ln 5 + \ln 7$.
2. Le nombre e^{20} est égal à :
   $\mathrm{e}^{20} = \mathrm{e}^{5+15} = \mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{15}$.

Exercice 8.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2 - 3\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$:
   $f'(x) = 2x - 1 - 0 - 3\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x}$
   Or $(x+1)(2x-3) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$ donc $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$.
2. On va déterminer les variations de la fonction f et, pour cela, étudier le signe de $f'(x)$.

x	$0,5$		$1,5$		$+\infty$
$x+1$		$+$	|	$+$	
$2x-3$		$-$	0	$+$	
x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f admet donc un minimum en $x = 1,5$ qui vaut
$f(1,5) = 1,5^2 - 1,5 - 2 - 3\ln(1,5) = -1,25 - 3\ln(1,5)$.

Exercice 9.

1. On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{-0{,}0434x} = 0{,}01$.

   $\mathrm{e}^{-0{,}0434x} = 0{,}01 \iff -0{,}0434x = \ln(0{,}01) \iff x = -\dfrac{\ln(0{,}01)}{0{,}0434}$

2. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6{,}75$ mW parcourt une fibre optique.

   La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 6{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}0434x}$.

   Le signal aura perdu 99 % de sa puissance pour une distance x telle que $P(x) = P(0) \times \left(1 - \dfrac{99}{100}\right)$ donc pour $P(x) = 6{,}75 \times 0{,}01$.

   $P(x) = 6{,}75 \times 0{,}01 \iff 6{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}0434x} = 6{,}75 \times 0{,}01 \iff \mathrm{e}^{-0{,}0434x} = 0{,}01 \iff x = -\dfrac{\ln(0{,}01)}{0{,}0434}$ ce qui donne environ 106 km.

Exercice 10.

Le thorium 231 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi :
$N(t) = N(0)e^{-0{,}027t}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t exprimé en heure.
La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié de ses noyaux se sont désintégrés.

> Vrai ou faux :
>
> « La demi-vie du thorium 231 est d'environ 11 heures. »

On cherche $t_{0,5}$ tel que $N(t_{0,5}) = \dfrac{1}{2}N(0)$ soit $N(0)\,\mathrm{e}^{-0{,}027t_{0,5}} = \dfrac{1}{2}N(0)$ ou $\mathrm{e}^{-0{,}027t_{0,5}} = \dfrac{1}{2}$.

On résout cette équation : $\mathrm{e}^{-0{,}027t_{0,5}} = \dfrac{1}{2} \iff -0{,}027t_{0,5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t_{0,5} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}027}$

Donc $t_{0,5} \approx 25{,}7$.

Affirmation fausse