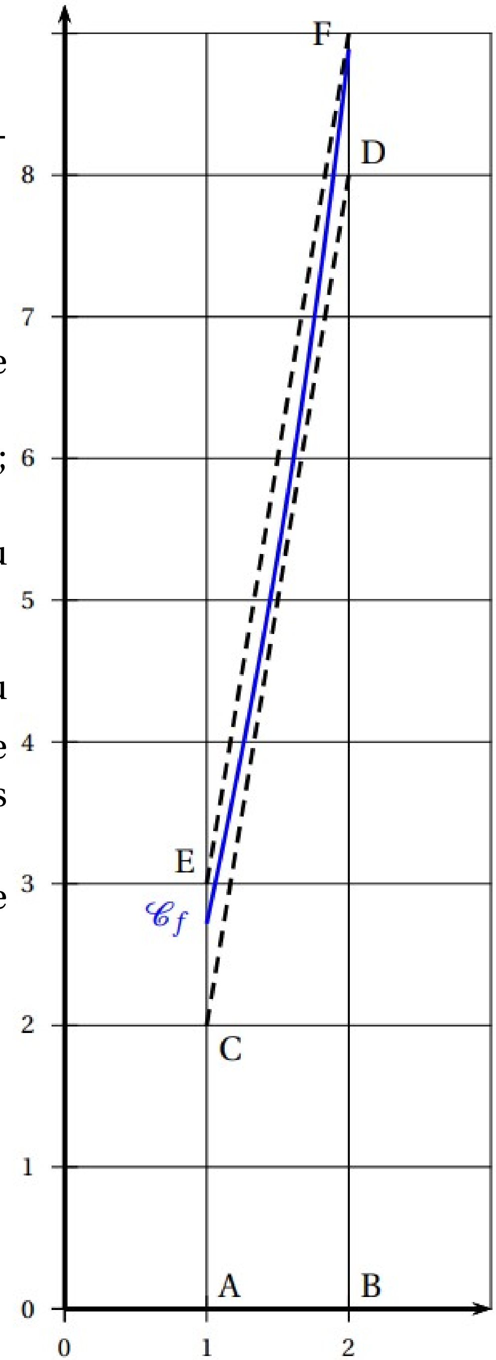
Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par :

$$f(x) = x + e^x - \frac{1}{x}.$$

On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
On considère les points A(1 ; 0) ; B(2 ; 0) ; C(1 ; 2) ; D(2 ; 8) ; E(1 ; 3) et F(2 ; 9).
On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus du segment [CD] et en dessous du segment [EF].



1. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

   $\mathscr{A}$ est compris entre l'aire $\mathscr{A}_1$ du trapèze ABDC et l'aire $\mathscr{A}_2$ du trapèze ABFE.

   $\mathscr{A}_1 = \dfrac{(\text{AC} + \text{BD}) \times \text{AB}}{2} = \dfrac{(2+8) \times 1}{2} = 5$

   $\mathscr{A}_2 = \dfrac{(\text{AE} + \text{BF}) \times \text{AB}}{2} = \dfrac{(3+9) \times 1}{2} = 6$

   Donc $5 \leqslant \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 6$.

2. Pour calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, il faut déterminer une primitive de la fonction f sur $[1\,;\,2]$.

   $f(x) = x + \mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{x}$

- La fonction $x \longmapsto x$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$.
- La fonction $x \longmapsto \text{e}^{x}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \text{e}^{x}$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.

Donc la fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \text{e}^{x} - \ln(x)$.

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x = \big[F(x)\big]_1^2 = F(2) - F(1) = \left(\dfrac{4}{2} + \text{e}^{2} - \ln(2)\right) - \left(\dfrac{1}{2} + \text{e}^{1} - \ln(1)\right) = 2 + \text{e}^{2} - \ln(2) - \dfrac{1}{2} - \text{e}$

$= \dfrac{3}{2} + \text{e}^{2} - \ln(2) - \text{e}$

Remarque : $\dfrac{3}{2} + \text{e}^{2} - \ln(2) - \text{e} \approx 5,48$ qui est compris entre 5 et 6.