Annales baccalauréat STI2D
Logarithme

Exercice 1.

Lors d'un concert de musique rock organisé dans la ville de Venise, une scène flottante était placée à 120 m au large de la côte et donc des spectateurs du premier rang. Cette configuration particulière a posé des problèmes d'acoustique liés à l'atténuation différentielle du son émis par les différents instruments, notamment du fait de l'influence de la fréquence du son sur la directivité de l'émission par les haut-parleurs.
L'exercice propose de modéliser cette situation à partir de données expérimentales.

On étudie mathématiquement le modèle obtenu en introduisant les fonctions f et g définies sur $[1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 125 - 10\ln(x)$ et $g(x) = 117 - 7,5\ln(x)$.
Ces fonctions modélisent respectivement les niveaux sonores du La1 et du Fa4 en fonction de la distance.

Q5. Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0 - 10 \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{x}$.

On modifie désormais les réglages d'émission pour améliorer la qualité du son. Les expressions des nouvelles fonctions décrivant la dépendance de L_1 et L_2 avec la distance sont alors :
$f_m(x) = 148 - 10\ln(x)$ et $g_m(x) = 136 - 7,5\ln(x)$, respectivement, pour les notes La1 et Fa4.

Q6. On résout l'équation $f_m(x) = g_m(x)$.

$$\begin{aligned} f_m(x) = g_m(x) &\iff 148 - 10\ln(x) = 136 - 7,5\ln(x) \iff 148 - 136 = 10\ln(x) - 7,5\ln(x) \\ &\iff 12 = 2,5\ln(x) \iff \frac{12}{2,5} = \ln(x) \iff 4,8 = \ln(x) \iff e^{4,8} = x \end{aligned}$$

donc $x \approx 121,5$.

La distance d_m des enceintes à laquelle doit se trouver le public pour que les deux notes aient le même niveau sonore est donc d'environ 121,5 m.

Q7. Pour les réglages modifiés, le niveau sonore du son reçu par les spectateurs à la distance d_m des enceintes pour chacune des deux notes est, en dB :
$f_m\left(e^{4,8}\right) = 148 - 10\ln\left(e^{4,8}\right) = 148 - 10 \times 4,8 = 100$.

Exercice 2.

Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'équation :

$$\frac{2}{3\ln(10)}\ln(x) - 2,88 = 4.$$

$\dfrac{2}{3\ln(10)}\ln(x) - 2,88 = 4 \iff \dfrac{2}{3\ln(10)}\ln(x) = 6,88 \iff \dfrac{1}{3\ln(10)}\ln(x) = 3,44$

$\iff \ln(x) = 3 \times \dfrac{3,44\ln(10)}{2} \iff \ln(x) = 10,32\ln(10)$

$\iff \ln(x) = \ln\left(10^{10,32}\right) \iff x = 10^{10,32}$, car le logarithme népérien est strictement croissant sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, soit environ $2,089 \times 10^{10}$.

$S = \left\{10^{10,32}\right\}$.

Exercice 3.

Simplifier l'écriture de l'expression suivante :

$$A(x) = -\ln(9) + 2\ln(3x).$$

$A(x) = -\ln(9) + \ln\left((3x)^2\right) = -\ln(9) + \ln\left(9x^2\right) = \ln\left(\dfrac{9x^2}{9}\right) = \ln\left(x^2\right) = 2\ln(x)$

Exercice 4.

On considère un réel x, strictement positif et on note $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Pour tout réel x, strictement positif, $\log(100x)$ est égal à :

A	B	C	D
$10x$	$100\log(x)$	$2+\log(x)$	$10+\log(x)$

$$\log(100x) = \log 100 + \log(x) = 2 + \log(x)$$

Exercice 5.

On considère l'équation :

$$3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5),$$

où x appartient à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Donner, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

a. 0 **b.** e^{-5} **c.** 10 **d.** 20

$$3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5) \iff \ln\left(x^3\right) - \ln\left(x+30\right) = \ln\left(5^2\right) \iff \ln\frac{x^3}{x+30} = \ln(25)$$
$$\iff \frac{x^3}{x+30} = 25$$

Pour $x = 10$, $\dfrac{x^3}{x+30} = \dfrac{1\,000}{40} = 25$. **Réponse c.**

Exercice 6.

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2\,025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2\ln\left(\text{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\text{e}}\right).$$

1. On a

$$\begin{aligned} 4\ln(3) + 2\ln(5) &= \ln\left(3^4\right) + \ln\left(5^2\right) \\ &= \ln\left(3^4 \times 5^2\right) \\ &= \ln(2\,025). \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} A &= 2\ln\left(\text{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\text{e}}\right) \\ &= 2\times 4\ln(\text{e}) - 3\times(-\ln(\text{e}) \\ &= 2\times 4 - 3\times(-1) \\ A &= 11. \end{aligned}$$

Exercice 7.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(x).$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. La fonction g est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g'(x)=\frac{1}{2}(2x)-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$.

   Or, on a, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}=g'(x).$$

2. On étudie le signe de $g'(x)$ grâce à sa forme factorisée donné à la question précédente. Puisque l'on définit la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur de g' est positif, et le facteur $x+1$ est aussi positif. Il s'ensuit que $g'(x)$ a le même signe que $x-1$, c'est-à-dire :
   - négatif sur $]0\,;\,1[$;
   - positif sur $]1\,;\,+\infty[$;
   - nul pour $x=1$.

   Par conséquent, g admet pour sens de variation les choses suivantes :
   - g est décroissante sur $]0\,;\,1[$;
   - g est croissante sur $]1\,;\,+\infty[$;
   - et g admet un minimum en 1.

   Ce minimum vaut $g(1)=\frac{1}{2}\times1^2-\ln(1)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

Exercice 8.

Résoudre dans $]1\ ;\ +\infty[$ l'équation :

$$\ln(x-1)+\ln(x+1)+\ln(x)=\ln\left(x^2-1\right)-\ln(0,5)\,.$$

On a $x^2-1=(x+1)(x-1)$, donc $\ln\left(x^2-1\right)=\ln[(x+1)(x-1)]=\ln(x+1)+\ln(x-1)$.

Les logarithmes de cette équation sont définis si :
$x+1>0, \quad x-1>0, \quad x>0$, soit si $x>1$.

Conclusion : les solutions sont à chercher dans l'intervalle$]1\ ;\ +\infty[$.
Tout d'abord $\ln\left(x^2-1\right)-\ln(0,5)=\ln\dfrac{x^2-1}{0,5}=\ln 2\left(x^2-1\right)$.

On peut donc écrire :
$\ln(x-1)+\ln(x+1)-\ln(x)=\ln\left(x^2-1\right)-\ln(0,5) \iff \ln x(x-1)(x+1)=\ln 2\left(x^2-1\right)$
et par croissance de la fonction logarithme népérien :
$x\left(x^2-1\right)=2\left(x^2-1\right) \iff x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)=0 \iff \left(x^2-1\right)(x-2)=0 \iff$ $(x+1)(x-1)(x-2)=0$.

Il y a donc trois possibilités : $x=-1$, ou $x=1$ ou $x=2$, mais seul $2\in]1\ ;\ +\infty[$. Donc $S=\{2\}$.

Exercice 9.

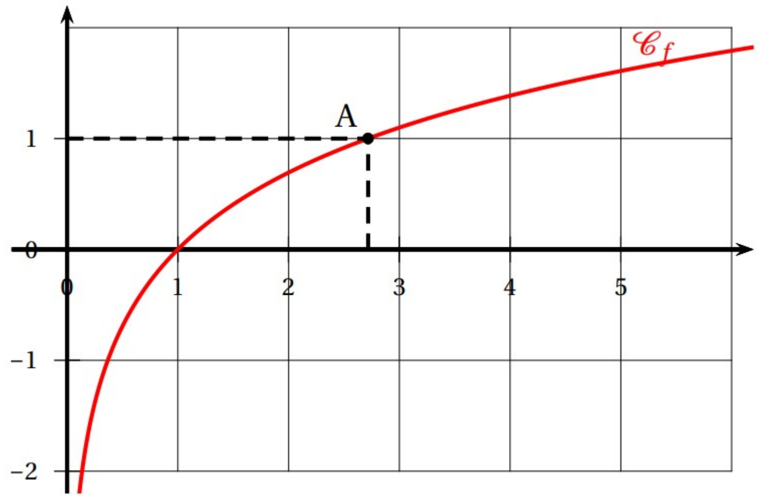
Lors d'une course, on a mesuré la fréquence cardiaque d'un coureur de 100 m.
Cette fréquence cardiaque, en battements par minute, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;100]$ par $f(x)=28\ln(x+1)+70$ où x est la distance parcourue, en mètre, depuis le départ de la course.

1. Selon ce modèle, quelle est la fréquence cardiaque de ce coureur au départ de la course ?
   On a $f(0)=28\ln 1+70=70$.
2. Selon ce modèle, au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque de ce sportif est-elle égale à 185 battements par minute ? Arrondir à l'unité.
   Il faut résoudre dans l'intervalle $[0\,;100]$, l'équation $f(t)=185$, soit
   $28\ln(x+1)+70=185 \iff 28\ln(x+1)=115 \iff \ln(x+1)=\dfrac{115}{28} \iff x+1=\mathrm{e}^{\frac{115}{28}} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{115}{28}}-1\approx 59,77$, soit 60m au mètre près.

Exercice 10.

On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x).$$



On note A le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(\mathrm{e}\,;\,1)$.

On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

La tangente T passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier.

La tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = f'(x_{\mathrm{A}})\,(x - x_{\mathrm{A}}) + f(x_{\mathrm{A}})$ soit $y = f'(e)\,(x - e) + f(e)$.

$f(x) = \ln(x)$ donc $f(e) = \ln(e) = 1$

$f(x) = \ln(x)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et donc $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

T a donc pour équation $y = \dfrac{1}{e}(x - e) + 1$ soit $y = \dfrac{1}{e}x - 1 + 1$ ou encore $y = \dfrac{1}{e}x$.

Et si $x = 0$, alors $y = \dfrac{1}{e}x = 0$ donc la droite T passe par l'origine du repère..

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2 - 3\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$.

   Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$: $f'(x) = 2x - 1 - 0 - 3\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x}$

   Or $(x+1)(2x-3) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$ donc $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$.

2. Montrer que f admet un minimum sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$ et préciser la valeur exacte de ce minimum.

On va déterminer les variations de la fonction f et, pour cela, étudier le signe de $f'(x)$.

x	$0,5$		$1,5$		$+\infty$
$x+1$		$+$	0	$+$	
$2x-3$		$-$	0	$+$	
x		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f admet donc un minimum en $x = 1,5$ qui vaut
$f(1,5) = 1,5^2 - 1,5 - 2 - 3\ln(1,5) = -1,25 - 3\ln(1,5)$.

Exercice 12.

On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln(2x+1)$.
On désigne par $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité graphique 1 cm.
On note $M(x\,;\,y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_h$. On suppose que l'ordonnée y du point M est supérieure à 15 cm.

> Vrai ou faux :
> « L'abscisse x du point M se situe à plus de 16 km du point O. »

On cherche l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 15, ce qui signifie qu'on cherche le nombre x tel que $h(x) = 15$. On résout cette équation :

$h(x) = 15 \iff \ln(2x+1) = 15 \iff 2x+1 = e^{15} \iff x = \dfrac{e^{15}-1}{2}$ donc $x \approx 1\,634\,508,19$cm soit environ $16,345$km.

Affirmation vraie