Corrigé

Complexes

Résoudre une équation du premier degré ou du type z² = a

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes :

1. $z + i = 12 - 3i$
   $z = 12 - 3i - i = 12 - 4i$

2. $z - 3 + 2i = 12 - 3i$
   $z = 12 - 3i + 3 - 2i = 15 - 5i$

3. $-7i + 5z + 2 = 0$
   $5z = -2 + 7i$
   $z = \dfrac{-2 + 7i}{5}$

4. $-4(i + z - 2) + 3 = 8$
   $-4(i + z - 2) = 8 - 3 = 5$
   $i + z - 2 = \dfrac{5}{-4} = 1,25$
   $z = 1,25 + 2 - i = 3,25 - i$

5. $z^2 = 4$
   $z = 2$ ou $z = -2$

6. $z^2 = 30$
   $z = \sqrt{30}$ ou $z = -\sqrt{30}$

7. $5z^2 + 10 = 50$
   $5z^2 = 50 - 10 = 40$
   $z^2 = \dfrac{40}{5} = 8$

$z=\sqrt{8}$ ou $z=-\sqrt{8}$

8. $z^2+z+1=0$
Plus difficile. On pose $z=a+bi$ ainsi $z^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2$.
Ainsi $z^2+z+1=a^2+2abi-b^2+a+bi+1=0$

Côté partie réelle on a : $a^2-b^2+a+1=0$ donc $a^2-b^2+a=-1$. On ne peut pas avancer plus pour le moment.

Côté partie imaginaire on a : $2ab+b=0$, on factorise par b ce qui donne $b(2a+1)=0$. On en déduit deux possibilités :
1) $b=0$ ou 2)$2a+1=0$ c'est à dire $a=-0,5$.

Par disjonction de cas on commence par supposer $b=0$. Dans ce cas la situation côté partie réelle devient $a^2-0^2+a=a^2+a=-1$ qui n'a pas de solution.

Le second cas suppose d'avoir $a=-0,5$. Dans ce cas la situation côté partie réelle devient $(-0,5)^2-b^2-0,5=-1$ c'est à dire $-b^2=-1-(-0,5)^2+0,5=1-0,25+0,5=1,25$ d'où $b^2=1,25$.
Deux solutions dans ce cas : $b=\sqrt{1,25}$ ou $b=-\sqrt{1,25}$.

On en conclut que $z=-0,5+\sqrt{1,25}i$ ou $z=-0,5-\sqrt{1,25}i$.