Corrigé
Complexes
Transformer à l'aide des formules d'addition

Exercice 1.

On a :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\end{array}}$$

1. $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$

Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=\mathrm{A}\times\cos(Bx+C)$.

On commence par développer $\mathrm{A}\times\cos(Bx+C)$ grâce à la première formule de la liste :
$\mathrm{A}\times\cos(Bx+C)=\mathrm{A}\times(\cos(Bx)\cos(C)-\sin(Bx)\sin(C))=\mathrm{A}\times\cos(Bx)\cos(C)-\mathrm{A}\times\sin(Bx)\sin(C)$

On en conclut que $\mathrm{A}\times\cos(Bx)\cos(C)-\mathrm{A}\times\sin(Bx)\sin(C)=\sin(x)+\cos(x)$
D'où $B=1$, c'est ce qui est devant le x.
$\mathrm{A}\times\cos(x)\cos(C)=\cos(x)\Rightarrow \mathrm{A}\cos(C)=1$
et de même $\mathrm{A}\times\sin(x)\sin(C)=\sin(x)\Rightarrow \mathrm{A}\sin(C)=1$

Cela veut dire que $\cos(C)=\sin(C)$ ce qui n'est possible que pour $C=\dfrac{\pi}{4}$ ou $C=\dfrac{-3\pi}{4}$.

Premier cas : $C=\dfrac{\pi}{4}$. Dans ce cas $A=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

Second cas : $C=\dfrac{-3\pi}{4}$. Dans ce cas $A=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

2. La tension u, exprimée en volt, aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t, exprimé en seconde, est donnée par :
$u(t)=\cos(50t)+\sqrt{3}\sin(50t)$.

Écrire $u(t)$ sous la forme $u(t) = \text{Umax} \times \cos(\omega t + \phi)$.

On commence par développer $\text{Umax} \times \cos(\omega t + \phi)$ grâce à la première formule de la liste :
$\text{Umax}\times\cos(\omega t+\phi) = \text{Umax}\times(\cos(\omega t)\cos(\phi)-\sin(\omega t)\sin(\phi)) = \text{Umax}\times\cos(\omega t)\cos(\phi)-\text{Umax} \times \sin(\omega t)\sin(\phi)$

On en conclut que $\text{Umax}\times\cos(\omega t)\cos(\phi) - \text{Umax}\times\sin(\omega t)\sin(\phi) = \cos(50t) + \sqrt{3}\sin(50t)$
D'où $\omega = 50$, c'est ce qui est devant le t.
$\text{Umax} \times \cos(50t)\cos(\phi) = \cos(t) \Rightarrow \text{Umax} \times \cos(\phi) = 1$
et de même $\text{Umax} \times \sin(50t)\sin(\phi) = \sqrt{3}\sin(50t) \Rightarrow \text{Umax} \times \sin(\phi) = \sqrt{3}$

Cela veut dire que $\sin(\phi)$ est $\sqrt{3}$ fois plus grand que $\cos(\phi)$ ce qui n'est possible que pour $\phi = \frac{\pi}{3}$ ou $\phi = \frac{-2\pi}{3}$.
Premier cas : $\phi = \frac{\pi}{3}$. Dans ce cas $\text{Umax} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
Second cas : $\phi = \frac{-2\pi}{3}$. Dans ce cas $\text{Umax} = \frac{1}{\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.
On peut éliminer ce cas car Umax est à priori positif.

3. On considère un signal électrique dont l'expression en fonction du temps t est donnée par :
$u(t) = \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t)$.

Écrire $u(t)$ sous la forme $u(t) = \text{Umax} \times \cos(\omega t + \phi)$.

On commence par développer $\text{Umax} \times \cos(\omega t + \phi)$ grâce à la première formule de la liste :
$\text{Umax}\times\cos(\omega t+\phi) = \text{Umax}\times(\cos(\omega t)\cos(\phi)-\sin(\omega t)\sin(\phi)) = \text{Umax}\times\cos(\omega t)\cos(\phi)-\text{Umax} \times \sin(\omega t)\sin(\phi)$

On en conclut que $\text{Umax}\times\cos(\omega t)\cos(\phi)-\text{Umax}\times\sin(\omega t)\sin(\phi) = \sqrt{3}\cos(t)-\sin(t)$
D'où $\omega = 1$, c'est ce qui est devant le t.
$\text{Umax} \times \cos(t)\cos(\phi) = \sqrt{3}\cos(t) \Rightarrow \text{Umax} \times \cos(\phi) = \sqrt{3}$

et de même $\text{Umax} \times \sin(t)\sin(\phi) = -\sin(t) \Rightarrow \text{Umax} \times \sin(\phi) = -1$

Cela veut dire que $\cos(\phi)$ est $-\sqrt{3}$ fois plus grand que $\sin(\phi)$ ce qui n'est possible que pour $\phi = \frac{-\pi}{6}$ ou $\phi = \frac{5\pi}{6}$.

Premier cas : $\phi = \frac{-\pi}{6}$. Dans ce cas $\text{Umax} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$.

Second cas : $\phi = \frac{5\pi}{6}$. Dans ce cas $\text{Umax} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -2$.

On peut éliminer ce cas car Umax est à priori positif.