Équations différentielles
Déterminer les solutions d'une équation différentielle y' = ay + b

Exercice 1.

Pour chaque équation différentielle du type $y' = ay + b$, l'ensemble des fonctions solutions est :

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{(avec C un nombre réel)}$$

1. $y' = 4y$
   a pour solutions les fonctions : Ce^{4x}

2. $y' = -3y + 6$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{-3x} + 2$

3. $y' = 5y - 10$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{5x} + 2$

4. $y' = -2y - 8$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{-2x} - 4$

5. $y' = y + 1$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{x} - 1$

6. $y' = -6y + 12$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{-6x} + 2$

7. $y' = -4 + 2y$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{2x} + 2$

8. $y' - 5 = -y$ que l'on peut écrire $y' = -y + 5$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{-x} + 5$

9. $y' - 3y = 9$ que l'on peut écrire $y' = +3y + 9$
   a pour solutions les fonctions : $Ce^{3x} - 3$

10. $y' + 5y + 15 = 0$ que l'on peut écrire $y' = -5y - 15$
    a pour solutions les fonctions : $Ce^{-5x} - 3$

Exercice 2.

On résout chaque équation différentielle du type $y' = ay + b$, puis on applique la condition initiale pour déterminer la solution particulière.

1. $y' = 4y$, avec $f(0) = 2$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{4x}$
   Condition : $f(0) = C = 2$
   Solution particulière : $f(x) = 2e^{4x}$

2. $y' = -3y + 6$, avec $f(1) = 0$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{-3x} + 2$
   Condition : $0 = Ce^{-3} + 2 \Rightarrow C = -2e^{3}$
   Solution particulière : $f(x) = -2e^{3-3x} + 2$

3. $y' = 5y - 10$, avec $f(0) = 1$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{5x} + 2$
   Condition : $1 = C + 2 \Rightarrow C = -1$
   Solution particulière : $f(x) = -e^{5x} + 2$

4. $y' = -2y - 8$, avec $f(2) = 0$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{-2x} - 4$
   Condition : $0 = Ce^{-4} - 4 \Rightarrow C = 4e^{4}$
   Solution particulière : $f(x) = 4e^{4-2x} - 4$

5. $y' = y + 1$, avec $f(0) = 5$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{x} - 1$
   Condition : $5 = C - 1 \Rightarrow C = 6$
   Solution particulière : $f(x) = 6e^{x} - 1$

6. $y' = -6y + 12$, avec $f(1) = 1$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{-6x} + 2$
   Condition : $1 = Ce^{-6} + 2 \Rightarrow C = -e^{6}$
   Solution particulière : $f(x) = -e^{6-6x} + 2$

7. $y' = -4 + 2y$, avec $f(0) = 3$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{2x} + 2$
   Condition : $3 = C + 2 \Rightarrow C = 1$

Solution particulière : $f(x) = e^{2x} + 2$

8. $y' - 5 = -y \iff y' = -y + 5$, avec $f(2) = 7$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{-x} + 5$
   Condition : $7 = Ce^{-2} + 5 \Rightarrow C = 2e^2$
   Solution particulière : $f(x) = 2e^{2-x} + 5$

9. $y' = 3y + 9$, avec $f(0) = -1$
   Solution générale : $f(x) = Ce^{3x} - 3$
   Condition : $-1 = C - 3 \Rightarrow C = 2$
   Solution particulière : $f(x) = 2e^{3x} - 3$

10. $y' + 5y + 15 = 0 \iff y' = -5y - 15$, avec $f(1) = -3$
    Solution générale : $f(x) = Ce^{-5x} - 3$
    Condition : $-3 = Ce^{-5} - 3 \Rightarrow C = 0$
    Solution particulière : $f(x) = -3$