Corrigé
Logarithme décimal
Résolution d'équations ou d'inéquations.

Exercice 1. équations

Résoudre les équations suivantes :

1. $2^x = 1024$

$\log(2^x) = \log(1024)$

$x\log(2) = \log(1024)$

$$x = \frac{\log(1024)}{\log(2)} = 10$$

2. $5^x = 123456$

$\log(5^x) = \log(123456)$

$\log(5^x) = \log(123456)$

$x\log(5) = \log(123456)$

$$x = \frac{\log(123456)}{\log(5)}$$

3. $3 \times 2^x = 3072$

$$2^x = \frac{3072}{3} = 1024$$

$\log(2^x) = \log(1024)$

$x\log(2) = \log(1024)$

$$x = \frac{\log(1024)}{\log(2)}$$

4. $17 \times 10^x = 17000000$

$10^x = 1000000$

$\log(10^x) = \log(1000000)$

$x\log(10) = \log(1000000)$

$$x = \frac{\log(1000000)}{\log(10)} = 6$$

5. $10^x = 100000000$

$$10^x = \frac{100000000}{17}$$

$$\log(10^x) = \log\left(\frac{100000000}{17}\right)$$

$$x\log(10) = \log\left(\frac{100000000}{17}\right)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{100000000}{17}\right)}{\log(10)}$$

6. $30 \times 7^x - 1700 = 1619156$

$$7^x = \frac{1619156 + 1700}{30}$$

$$7^x = \frac{810428}{15}$$

$$\log(7^x) = \log\left(\frac{810428}{15}\right)$$

$$x\log(7) = \log\left(\frac{810428}{15}\right)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{810428}{15}\right)}{\log(7)}$$

7. $20 \times 7^{x+1} - 1800 = 1619156$

$$7^{x+1} = \frac{1619156 + 1800}{20}$$

$$7^{x+1} = 81047,8$$
$$\log\left(7^{x+1}\right) = \log(81047,8)$$
$$(x+1)\log(7) = \log(81047,8)$$

$$x + 1 = \frac{\log(81047,8)}{\log(7)}$$

$$x = \frac{\log(81047,8)}{\log(7)} - 1$$

8. $112233 + 150 \times 4^{0,2x-10} = 100000$

$$4^{0,2x-10} = \frac{100000 - 112233}{150}$$

$$4^{0,2x-10} = \frac{-12233}{150}$$

$$\log\left(4^{0,2x-10}\right) = \log\left(\frac{-12233}{150}\right)$$

$$(0,2x-10)\log(4) = \log\left(\frac{-12233}{150}\right)$$

$$0,2x - 1 = \frac{\log\left(\frac{-12233}{150}\right)}{\log(4)}$$

$$0,2x = \frac{\log\left(\frac{-12233}{150}\right)}{\log(4)} + 1$$

$$x = \frac{5\log\left(\frac{-12233}{150}\right)}{\log(4)} + 5$$

Exercice 2. inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2^x < 123456$
$$\log(2^x) < \log(123456)$$

$$x\log(2) < \log(123456)$$

$$x < \frac{\log(123456)}{\log(2)}$$

2. $12 \times 5^x > 987654$

$$5^x > \frac{987654}{12}$$

$$5^x > 82304,5$$

$$\log(5^x) > \log(82304,5)$$

$$x\log(5) > \log(82304,5)$$

$$x > \frac{\log(82304,5)}{\log(5)}$$

3. $30 \times 0,7^x - 1700 \leq 1619156$

$$0,7^x \leq \frac{1619156+1700}{30}$$
$$\log\left(0,7^x\right) \leq \log\left(\frac{1620856}{30}\right)$$
$$x\log(0,7) \leq \log\left(\frac{810428}{15}\right)$$
$$x \geq \frac{\log\left(\frac{810428}{15}\right)}{\log(0,7)}$$

4. $3 \times 3^{5x-3} + 15167 \geq 100000$

$$3^{5x-3} \geq \frac{100000-15167}{3}$$
$$\log\left(3^{5x-3}\right) \geq \log\left(\frac{84833}{3}\right)$$
$$(5x-3)\log(3) \geq \log\left(\frac{84833}{3}\right)$$
$$5x-3 \geq \frac{\log\left(\frac{84833}{3}\right)}{\log(3)}$$

Exercice 3. problème

Je place 800 € au taux annuel de 4,5%.

1. Au bout de combien d'années ce placement atteindrait 1000 € ?
Tout d'abord posons la fonction $f(x) = 800 \times 1,045^x$ qui donne la somme sur le placement après x années. Le 1,045 est obtenu car c'est le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 4,5% : $1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$.

On cherche $f(x) = 1000$
$800 \times 1,045^x = 1000$
$1,045^x = 1,25$
$\log\left(1,045^x\right) = \log(1,25)$
$x\log(1,045) = \log(1,25)$

$$x = \frac{\log(1,25)}{\log(1,045)} \approx 5,07$$
Cinq années ne suffiront pas, de peu, mais cette somme sera atteinte en 6 ans.

2. Au bout de combien d'années ce placement atteindrait 10000 € ?
On cherche $f(x) = 10000$
$800 \times 1,045^x = 10000$
$1,045^x = 12,5$
$\log\left(1,045^x\right) = \log(12,5)$
$x\log(1,045) = \log(12,5)$

$$x = \frac{\log(12,5)}{\log(1,045)} \approx 57,4$$
57 années ne suffiront pas, de peu, mais cette somme sera atteinte en 58 ans.

3. Au bout de combien de **mois** ce placement atteindrait 2000 € ?
On cherche $f(x) = 2000$
$800 \times 1,045^x = 2000$
$1,045^x = 2,5$
$\log(1,045^x) = \log(2,5)$
$x\log(1,045) = \log(2,5)$

$x = \dfrac{\log(2,5)}{\log(1,045)} \approx 20,817$
Les intérêts ne tombent que chaque année donc en pratique ce serait au bout de 21 ans mais on peut tout de même donner le nombre de mois :
$12 \times 0,817 = 9,804$
Il faudrait donc dans ce cas 20 ans et 10 mois.

4. Au bout de combien de **jours** ce placement atteindrait 3000 € ?
On cherche $f(x) = 3000$
$800 \times 1,045^x = 3000$
$1,045^x = 3,75$
$\log(1,045^x) = \log(3,75)$
$x\log(1,045) = \log(3,75)$

$x = \dfrac{\log(3,75)}{\log(1,045)} \approx 30,0284$
De même que précédemment, la réponse en pratique serait, de peu, 31 ans mais on peut tout de même donner le nombre de jours :
$365 \times 0,0284 = 10,366$
Il faudrait donc dans ce cas 30 ans et 11 jours.